Cid A. Guelli
Gelson Iezzi
Osvaldo Dolce

GEOMETRIA MÉTRICA

Cid A. Guelli
Gelson Iezzi
Osvaldo Dolce

GEOMETRIA MÉTRICA

editora moderna ltda.
são paulo — brasil

ÍNDICE

Cap. IV — Prisma.

Cap. V — Pirâmide.

Cap. VI — Cilindro e cone.

Cap. VII — Inscrição e circunscrição de sólidos.

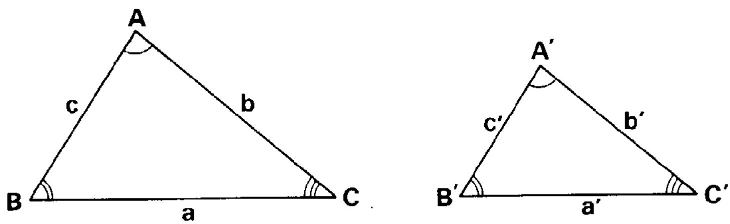
CAPÍTULO I

SEMELHANÇA ENTRE TRIÂNGULOS

I. SEMELHANÇA ENTRE TRIÂNGULOS.

1• DEFINIÇÃO

Dois triângulos são chamados semelhantes, se e sòmente se, possuem os três ângulos *ordenadamente* congruentes e os lados *homólogos* proporcionais.



$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \iff \left(\begin{matrix} \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \hat{B} \equiv \hat{B}' \\ \hat{C} \equiv \hat{C}' \end{matrix} \wedge \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \right)$$

2• RAZÃO DE SEMELHANÇA

Sendo k a razão entre os lados homólogos,

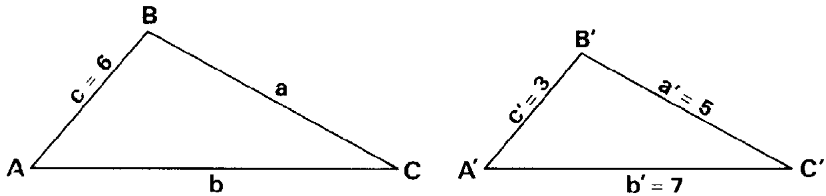
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$$

k é chamado razão de semelhança dos triângulos.
Se k = 1, pela definição de congruência, os triângulos são congruentes.

APLICAÇÕES

1ª) Os triângulos ABC e A'B'C' são semelhantes; os lados do segundo medem A'B' = 3, A'C' = 7, B'C' = 5 e o lado AB do primeiro mede 6. Obter as medidas dos outros dois lados do primeiro triângulo.

SOLUÇÃO



$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{6}{3} \Rightarrow$$

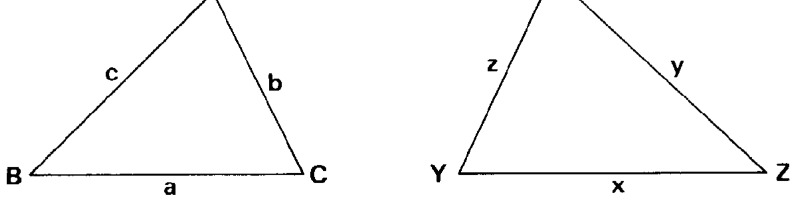
$$\Rightarrow \frac{a}{5} = \frac{b}{7} = 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{5} = 2 \Rightarrow a = 10 \\ \frac{b}{7} = 2 \Rightarrow b = 14 \end{cases}$$

Notemos que a razão de semelhança do ΔABC para o $\Delta A'B'C'$ é 2.

RESPOSTA: BC e AC medem, respectivamente 10 e 14.

2ª) Se os triângulos ABC e XYZ são semelhantes, escrever a razão de semelhança.

SOLUÇÃO



$$\Delta ABC \sim \Delta XYZ \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

NOTAS:

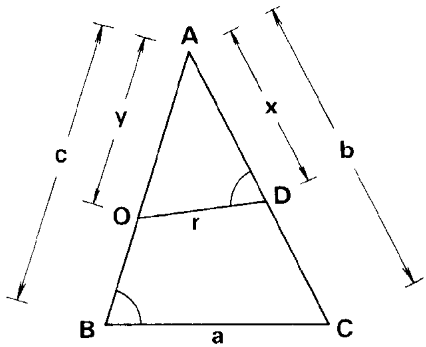
1) Nos numeradores colocamos os lados do primeiro triângulo (ABC) em qualquer ordem. Nos respectivos denominadores colocamos os lados homólogos (homo = mesmo; logos = lugar).

Assim, pode-se também escrever:

$$\frac{b}{y} = \frac{a}{x} = \frac{c}{z} \quad \text{ou} \quad \frac{c}{z} = \frac{a}{x} = \frac{b}{y}, \quad \text{etc.}$$

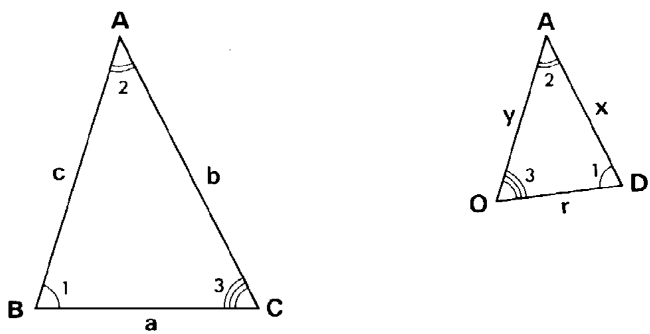
2) Basta que dois ângulos de um triângulo sejam ordenadamente congruentes a dois ângulos de outro triângulo para que êsses triângulos sejam semelhantes, pois os terceiros ângulos serão obrigatòriamente congruentes.

3ª) Na figura ao lado os triângulos são semelhantes pois têm um ângulo comum e mais um par de ângulos congruentes. Dar a razão de semelhança.



SOLUÇÃO

Primeira providência: Separar os triângulos, marcando os ângulos congruentes com "marcas iguais".

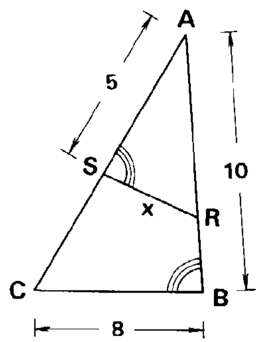


Segunda providência: Os lados homólogos estão opostos a "marcas iguais".

$$\triangle ABC \sim \triangle ADO \implies \overset{\text{op. ao 2}}{\underset{\text{op. ao 2}}{\frac{a}{r}}} = \overset{\text{op. ao 1}}{\underset{\text{op. ao 1}}{\frac{b}{y}}} = \frac{c}{x}$$

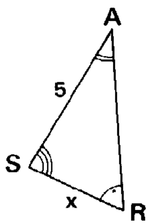
(A seqüência destas letras deve corresponder à dos ângulos "ordenadamente" iguais").

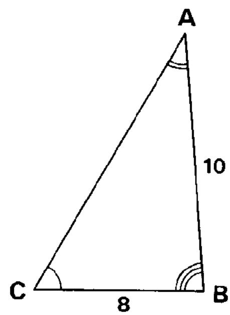
4ª) Na figura ao lado calcular x, sabendo que os triângulos são semelhantes.



SOLUÇÃO

Separando os triângulos





$\triangle ARS \sim \triangle ACB \implies \frac{x}{8} = \frac{5}{10} \implies x = 4$

RESPOSTA: $x = 4$

3• PROPRIEDADES

Da definição de triângulos semelhantes decorrem as propriedades:

a) Reflexiva: $\triangle ABC \sim \triangle ABC$

b) Simétrica: $\triangle ABC \sim \triangle RST \iff \triangle RST \sim \triangle ABC$

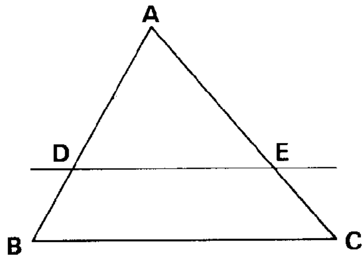
c) Transitiva: $\left.\begin{array}{l}\triangle ABC \sim \triangle RST \\ \triangle RST \sim \triangle XYZ\end{array}\right\} \implies \triangle ABC \sim \triangle XYZ$

4• TEOREMA FUNDAMENTAL

"Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intercepta os outros dois em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro".

Hipótese		Tese
$\boxed{\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{BC}}$	$\Longrightarrow$	$\boxed{\Delta ADE \sim \Delta ABC}$

DEMONSTRAÇÃO



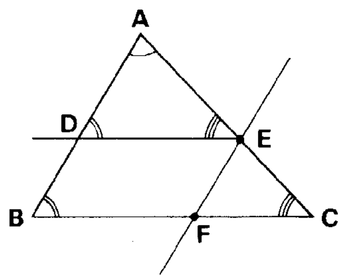
Para provarmos a semelhança entre ΔADE e ΔABC, precisamos provar que êles têm ângulos ordenadamente congruentes e lados homólogos proporcionais.

1. Ângulos congruentes

$$\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{BC} \Longrightarrow \hat{D} \equiv \hat{B} \quad e \quad \hat{E} \equiv \hat{C}$$

(ângulos correspondentes determinados por duas paralelas)

então temos: $\hat{D} \equiv \hat{B}$, $\hat{E} \equiv \hat{C}$ e $\hat{A}$ comum (1)



2. Lados proporcionais

   Pelo teorema de Tales (*) temos

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

   Por E construímos $\overleftrightarrow{EF}$ paralela a $\overleftrightarrow{AB}$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Paralelogramo BDEF} \Longrightarrow DE \equiv BF \\ \text{Teorema de Tales} \Longrightarrow \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{BF}{BC} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

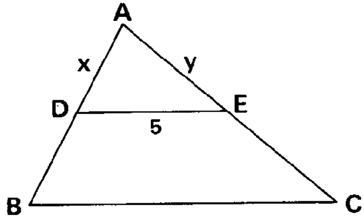
   Logo, $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$ (2)

3. Conclusão:

$$(1) \text{ e } (2) \Longrightarrow \Delta ADE \sim \Delta ABC$$

(*) Teorema de Tales: "Se um feixe de retas paralelas tem duas transversais, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma é igual à razão entre os segmentos correspondentes na outra".

APLICAÇÕES



1ª) Na figura temos:

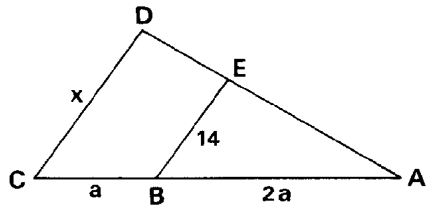
$AB = 12$, $AC = 13$, $BC = 15$

$DE = 5$ e $\overleftrightarrow{DE}$ é paralela a $\overleftrightarrow{BC}$.

Calcular $AD = x$ e $AE = y$.

SOLUÇÃO

$$\overleftrightarrow{DE} \;//\; \overleftrightarrow{BC} \Longrightarrow \Delta ADE \sim \Delta ABC \Longrightarrow \frac{x}{12} = \frac{y}{13} = \frac{5}{15} \Longrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = \dfrac{13}{3} \end{cases}$$



2ª) Na figura, $AB = 2(BC)$, $AE = 2(DE)$ e $BE = 14$. Calcular CD, sabendo que $\overleftrightarrow{BE} \;//\; \overleftrightarrow{CD}$

SOLUÇÃO

$$\frac{AB}{BC} = 2,\ \frac{AE}{DE} = 2 \Longrightarrow \overleftrightarrow{BE} \;//\; \overleftrightarrow{CD} \Longrightarrow \Delta ACD \sim \Delta ABE \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{CD}{BE} = \frac{AC}{AB} \Longrightarrow \frac{x}{14} = \frac{3a}{2a} \Longrightarrow x = 21.$$

5• 1º CASO DE SEMELHANÇA.

"Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então êles são semelhantes".

Hipótese		Tese
ΔABC, $\Delta A'B'C'$ $\hat{A} \equiv \hat{A}'$, $\hat{B} \equiv \hat{B}'$	$\Longrightarrow$	$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

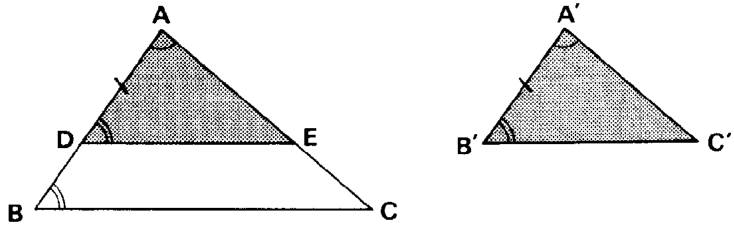
DEMONSTRAÇÃO

1º caso: os triângulos são congruentes logo são semelhantes.

2º caso: os triângulos não são congruentes.

Suponhamos que $AB > A'B'$

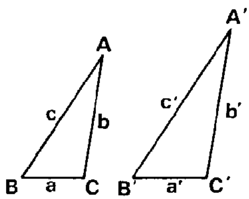
Seja D um ponto de AB tal que $AD \equiv A'B'$ e o triângulo ADE com $\hat{D} \equiv \hat{B}'$ e E no lado AC.



$$\left.\begin{array}{l}(\hat{A} \equiv \hat{A}',\ AD \equiv A'B',\ \hat{D} \equiv \hat{B}') \xRightarrow{ALA} \Delta ADE \equiv \Delta A'B'C' \\ \left.\begin{array}{l}\hat{B} \equiv \hat{B}' \\ \hat{B}' \equiv \hat{D}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B} \equiv \hat{D} \Rightarrow \overleftrightarrow{DE} \,//\, \overleftrightarrow{BC} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta ADE\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

OBSERVAÇÕES

1ª) Esquema do caso de semelhança



$$\left.\begin{array}{l}\hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \hat{B} \equiv \hat{B}'\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k.$$

Isto é

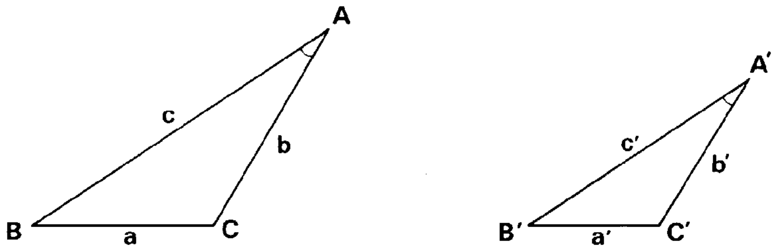
Se dois triângulos têm dois ângulos ordenadamente congruentes, então êles são semelhantes e daí sai que têm lados homólogos proporcionais.

("2 ângulos congruentes => triângulos semelhantes => => lados proporcionais")

2ª) Existem dois outros casos de semelhança, cujas demonstrações são análogas à do caso citado, dos quais daremos enunciado e esquema.

6• 2º CASO:

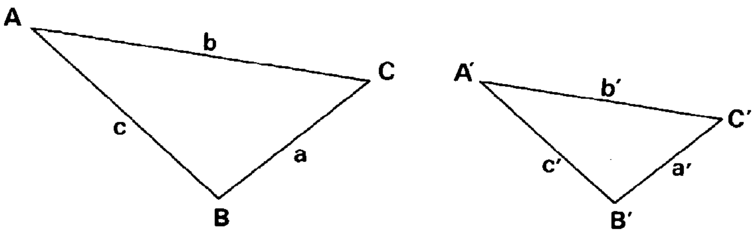
"Se dois lados de um triângulo são proporcionais aos homólogos de outro triângulo e os ângulos compreendidos são congruentes, então os triângulos são semelhantes".



$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{c}{c'} = \dfrac{b}{b'} = k \\ \hat{A} \equiv \hat{A}'\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Rightarrow \left(\dfrac{a}{a'} = k,\quad \hat{B} \equiv \hat{B}',\quad \hat{C} \equiv \hat{C}'\right)$$

7• 3º CASO:

"Se dois triângulos têm os lados homólogos proporcionais, então êles são semelhantes".



$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Rightarrow (\hat{A} \equiv \hat{A}',\quad \hat{B} \equiv \hat{B}',\quad \hat{C} \equiv \hat{C}')$$

8• Com base nos casos de semelhança, pode-se ter os resultados seguintes.

Se a razão de semelhança de dois triângulos é k, então:

a razão entre lados homólogos é k;
a razão entre os perímetros é k;
a razão entre alturas homólogas é k;
a razão entre medianas homólogas é k;
a razão entre bissetrizes internas homólogas é k;
a razão entre os raios dos círculos inscritos é k;
a razão entre os raios dos círculos circunscritos é k;

⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

a razão entre dois elementos lineares homólogos é k.

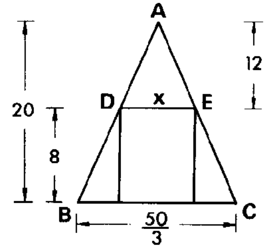
APLICAÇÕES

1ª) Num triângulo isósceles de 20 cm de altura e $\frac{50}{3}$ cm de base está inscrito um retângulo de 8 cm de altura. Calcular a medida da base do retângulo.

SOLUÇÃO

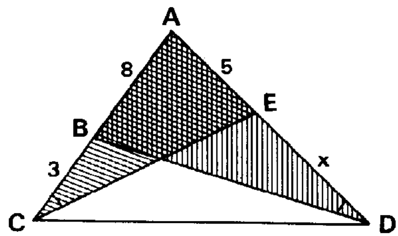
razão entre as alturas

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{x}{\frac{50}{3}} = \frac{20-8}{20} \Rightarrow x = 10$$



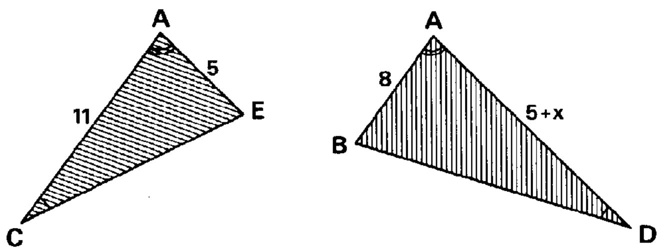
RESPOSTA: 10 cm.

2ª) Na figura ao lado as medidas são AB = 8 cm, BC = 3, AE = 5. Calcular DE, sabendo que $A\hat{C}E \equiv A\hat{D}B$.



SOLUÇÃO

Separando os triângulos temos:



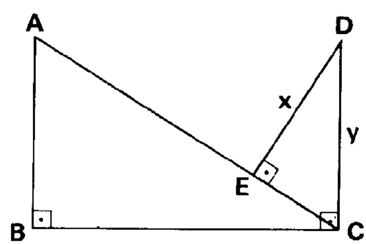
$(\hat{A}$ é comum, $\hat{C} \equiv \hat{D}) \Rightarrow \triangle ACE \sim \triangle ADB \Rightarrow \frac{5+x}{11} = \frac{8}{5} \Rightarrow x = \frac{63}{5}$.

RESPOSTA: $DE = \frac{63}{5}$ cm

3ª) Na figura temos:

AB = 8, BC = 15, AC = 17 e EC = 4.

Obter DE e CD.



SOLUÇÃO

DE = x CD = y

$\Delta DEC \sim \Delta CBA$ pois $\hat{B} \equiv \hat{E}$ (são retos) e

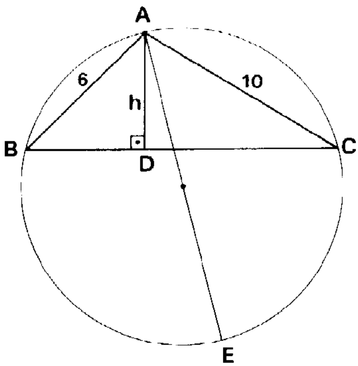
$\hat{C} \equiv \hat{D}$ (ângulos de lados respectivamente perpendiculares)

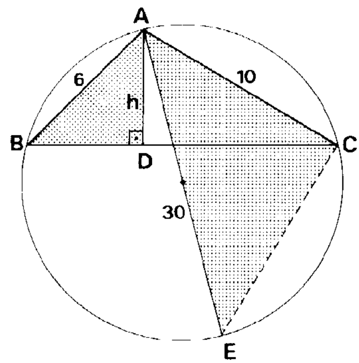
Da semelhança sai: $\dfrac{x}{15} = \dfrac{y}{17} = \dfrac{4}{8} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{15}{2} \\ y = \dfrac{17}{2} \end{cases}$

RESPOSTA: $DE = \dfrac{15}{2}$ e $CD = \dfrac{17}{2}$

4ª) Considere a circunferência circunscrita a um triângulo ABC. Seja AE um diâmetro desta circunferência e AD altura do triângulo. Sendo AB = 6 cm, AC = 10 cm e AE = 30 cm, calcular a altura AD.

SOLUÇÃO





Considerando os triângulo ADB e ACE, temos:

($\hat{D}$ é reto, $\hat{C}$ é reto $^{(*)}$) $\Rightarrow \hat{D} \equiv \hat{C}$

($\hat{B} = \dfrac{\widehat{AC}}{2}$, $\hat{E} = \dfrac{\widehat{AC}}{2}$ (*)) $\Rightarrow \hat{B} \equiv \hat{E}$

($\hat{D} \equiv \hat{C}$, $\hat{B} \equiv \hat{E}$) $\Rightarrow \Delta ADB \sim \Delta ACE \Rightarrow \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AB}{AE} \Rightarrow \dfrac{h}{10} = \dfrac{6}{30} \Rightarrow h = 2$

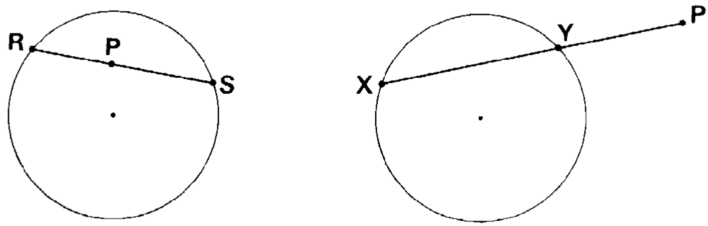
RESPOSTA: A altura mede 2 cm.

(*) "A medida de um ângulo inscrito é igual à metade da medida do arco interno correspondente (ou subentendido)".

II. POTÊNCIA DE UM PONTO.

Vamos estudar a potência de um ponto P em relação a uma circunferência.

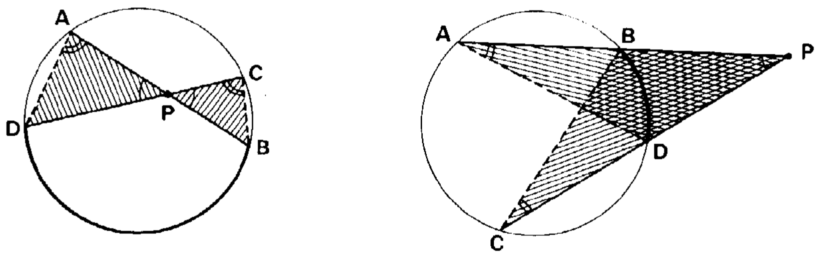
1º caso: P é interior   2º caso: P é exterior.



Dizemos que RS é uma corda e que RP e PS são suas partes; PX é um "segmento secante" e PY é sua parte exterior. Com isto, vamos a uma

Dedução (para os dois casos).

9• Se por P passam duas retas concorrentes que interceptam a circunferência em A, B e C, D respectivamente, temos:



Considerando os triângulos PAD e PCB.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{P}\ \text{o.p.v. (ou comum)}\\ \hat{A}=\hat{C}=\dfrac{\widehat{BD}}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta PAD \sim \Delta PCB \Rightarrow \frac{PA}{PD}=\frac{PC}{PB} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (PA)\times(PB)=(PC)\times(PD)$$

Logo, deduzimos que:

10• No 1º caso: "Se duas cordas de uma mesma circunferência se interceptam, então o produto das medidas das duas partes de uma é igual ao produto das medidas das duas partes da outra".

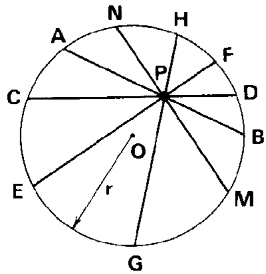
11• No 2º caso: "Se por um ponto (P) exterior a uma circunferência, conduzimos dois "segmentos secantes" (PA e PC), então o produto das medidas do primeiro (PA) pela de sua parte exterior (PB) é igual ao produto das medidas do segundo (PC) pela de sua parte exterior (PD)".

12• GENERALIZAÇÃO DO 1º CASO.

Consideremos as cordas AB, CD, EF, GH, ..., MN que se interceptam em P.

Com o resultado anterior e tomando AB para comparação, temos:

$$(PA) \times (PB) = (PC) \times (PD)$$
$$(PA) \times (PB) = (PE) \times (PF)$$
$$(PA) \times (PB) = (PG) \times (PH)$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$(PA) \times (PB) = (PM) \times (PN)$$



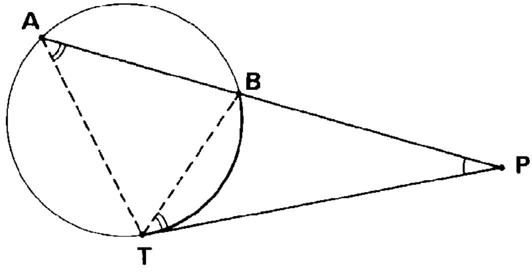
Donde concluímos que, fixado o ponto P e a circunferência, (PA)×(PB) é constante, qualquer que seja a corda AB passando por P. Êste produto invariante (PA) × (PB) é chamado *potência do ponto P em relação à circunferência*.

Logo,

$$\boxed{\begin{aligned} &(PA) \times (PB) = (PC) \times (PD) = (PE) \times (PF) = \\ &= (PG) \times (PH) = \ldots = (PM) \times (PN) = \\ &= \text{Potência de } P \text{ em relação à circunferência } (O,r). \end{aligned}}$$

13• GENERALIZAÇÃO DO 2º CASO.

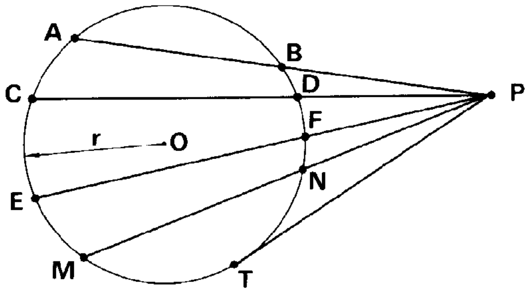
Consideremos o segmento secante PA, sua parte exterior PB e um segmento tangente PT.



Analisando os triângulos PAT e PTB vem:

$$\left.\begin{aligned} &\hat{P} \ \text{comum} \\ &\hat{A} = \hat{T} = \frac{\widehat{TB}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta PAT \sim \Delta PTB \Rightarrow \frac{PA}{PT} = \frac{PT}{PB} \Rightarrow (PA) \times (PB) = (PT)^2$$

Com o resultado acima, e procedendo de modo análogo ao feito no 1º caso, temos:

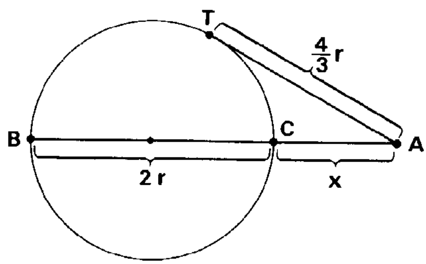


$(PA) \times (PB) = (PC) \times (PD) = (PE) \times (PF) = \ldots =$
$= (PM) \times (PN) = (PT)^2 =$
$=$ Potência do ponto P em relação à circunferência (O, r)

14• EXEMPLOS

1º) O comprimento de uma tangente AT a uma circunferência de raio r é $\frac{4}{3}r$. Calcular a distância entre A e a circunferência.

SOLUÇÃO



$(AB) \times (AC) = (AT)^2 \Rightarrow$

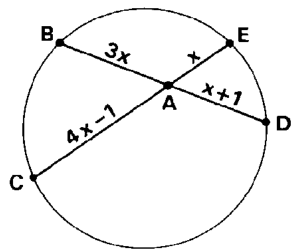
$\Rightarrow (x + 2r)x = \left(\frac{4}{3}r\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9x^2 - 18\,rx - 16\,r^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -\frac{8r}{3}$ (não serve) ou $x = \frac{2r}{3}$

RESPOSTA: $\frac{2r}{3}$

2º) Na figura, calcular as medidas das cordas BD e CE.



SOLUÇÃO

$(AB) \times (AD) = (AC) \times (AE) \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x(x + 1) = (4x - 1)x \Rightarrow$

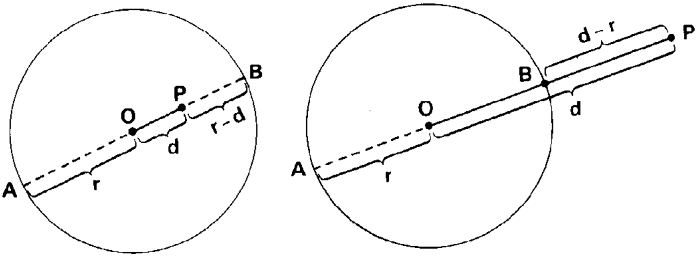
$x = 0$ (não serve) ou $x = 4$

$BD = 3x + x + 1 = 17$ $\qquad CE = 4x - 1 + x = 19$

RESPOSTA: $BD = 17$ e $CE = 19$

3º) Calcular a potência de um ponto P em relação a uma circunferência de centro O e raio r , em função da distância d entre O e P e do raio r .

SOLUÇÃO



Conforme vimos nos itens 12 e 13, qualquer corda (ou segmento secante) serve para nos dar a potência x de P em relação à circunferência.

No 1º caso $x = (PA) \times (PB) = (d+r) \times (r-d) = r^2 - d^2$

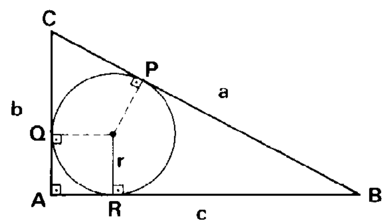
No 2º caso $x = (PA) \times (PB) = (d+r) \times (d-r) = d^2 - r^2$

Nos dois casos $x = |\, d^2 - r^2 \,|$

4º) Dado um triângulo retângulo de catetos b e c e hipotenusa a, calcular o raio r da circunferência inscrita.

SOLUÇÃO

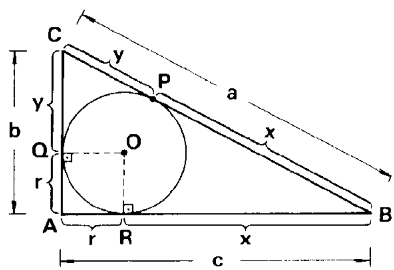
Sejam P, Q e R os pontos de contacto da circunferência com os lados BC, AC e AB do triângulo.



Usando tangência (ou se quizer, potência) e o quadrado OQAR, vem

AQ = AR = r, BR = BP = x,

CP = CQ = y.



Calculando o perímetro (2p) do ΔABC, temos:

$(x + y) + (y + r) + (r + x) = a + b + c = 2p$

$2r + 2\underbrace{(x + y)}_{a} = 2p \Rightarrow r + a = p \Rightarrow r = p - a$

RESPOSTA: $r = p - a$ onde p é o semi-perímetro.

III. TEOREMA DE PITÁGORAS.

Admitindo que a área de um quadrado é o quadrado da medida do lado, o que será visto no item 50, vamos ao teorema abaixo.

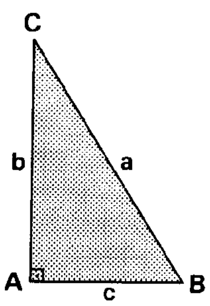
15• TEOREMA DE PITÁGORAS

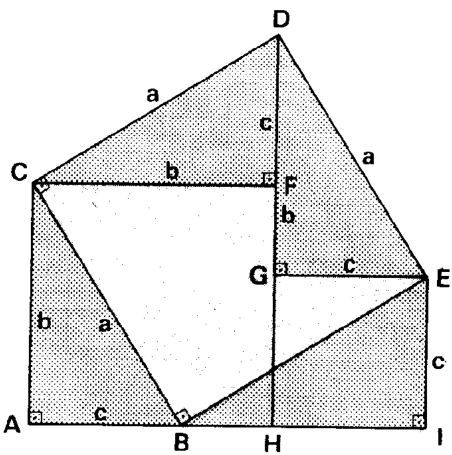
"Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos".

Hipótese		Tese
ΔABC retângulo de catetos b e c e hipotenusa a	$\Longrightarrow$	$a^2 = b^2 + c^2$

DEMONSTRAÇÃO

Considerando o triângulo retângulo ABC e as construções auxiliares da figura abaixo, devemos notar que:





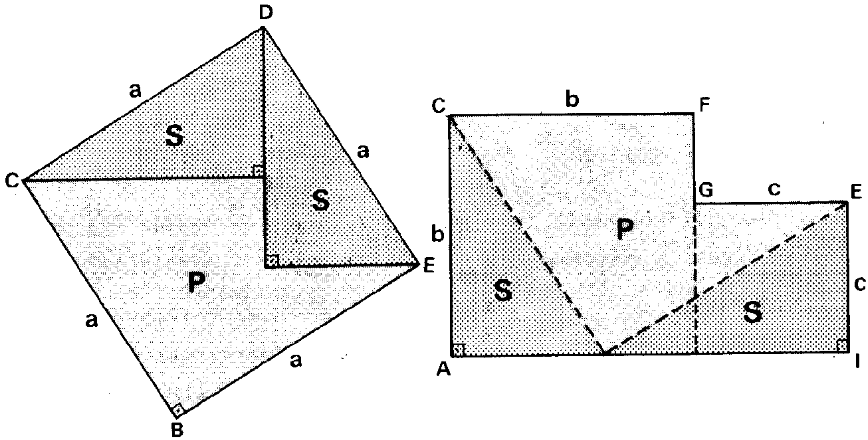
BCDE é um quadrado de lado a;

ΔABC, ΔFDC, ΔGED, ΔIEB são triângulos congruentes de área S;

ACFH é um quadrado de lado b;

EIHG é um quadrado de lado c

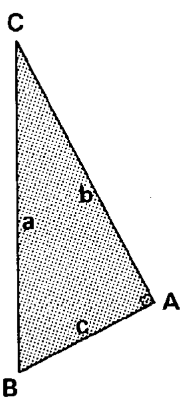
Analisando o quadrado BCDE, a reunião dos quadrados ACFH e EIHG, e sendo P a área do polígono BCFGE, vem:

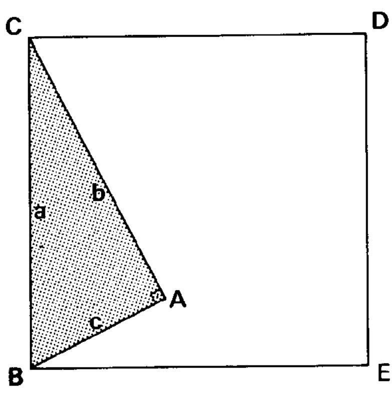


$$\left.\begin{array}{l} a^2 = P + 2S \\ b^2 + c^2 = P + 2S \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

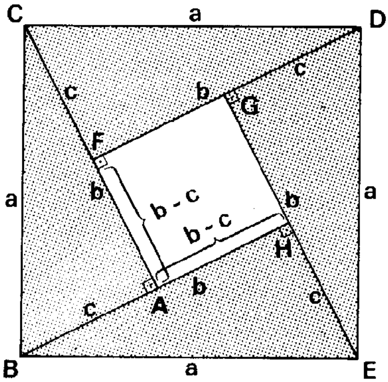
16• Outra demonstração

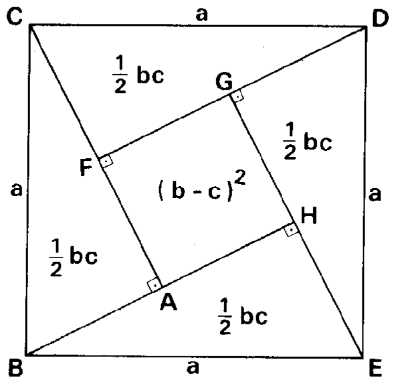
Estamos admitindo que a área do triângulo retângulo de catetos b e c é dada por $\frac{1}{2}bc$ conforme será visto no item 52.
Seja o ΔABC e consideremos o quadrado BCDE, contendo o triângulo.





Tracemos $DF \perp AC$, $EG \perp DF$ e $BH \perp EG$





Notemos que os triângulos ABC, FCD, GDE e HEB são todos congruentes de área $\frac{1}{2}bc$ e que AFGH é um quadrado de lado (b − c), portanto, de área $(b-c)^2$.

Sendo que

Área BCDE = Área ABC + Área FCD + Área GDE + Área HEB + Área AFGH

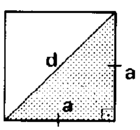
vem

$$a^2 = \frac{1}{2}bc + \frac{1}{2}bc + \frac{1}{2}bc + \frac{1}{2}bc + (b-c)^2 \Longrightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

17• APLICAÇÕES

1ª) Diagonal do quadrado.

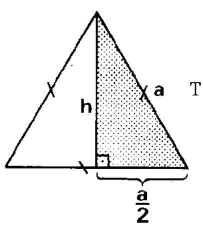
Dado um quadrado de lado a, calcular sua diagonal d .



T.P. $\Rightarrow d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d^2 = 2a^2 \Rightarrow \boxed{d = a\sqrt{2}}$

2ª) Altura do triângulo equilátero.

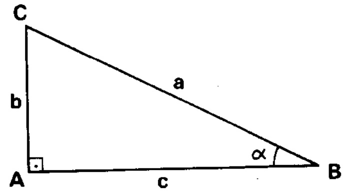
Dado um triângulo equilátero de lado a, calcular sua altura h.



T.P. $\Rightarrow a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow h^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow \boxed{h = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$

3ª) Seno, cosseno e tangente.
Sendo α a medida de um dos ângulos agudos de um triângulo retângulo e pondo-se

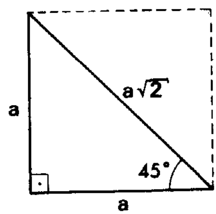


$$\text{seno de } \alpha = \text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a},$$

$$\text{cosseno de } \alpha = \cos \alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a} \quad \text{e}$$

$$\text{tangente de } \alpha = \text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{b}{c}$$

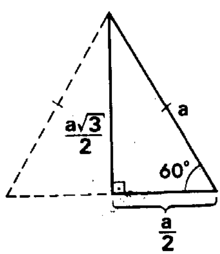
tem-se:



$$\text{sen } 45^o = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^o = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

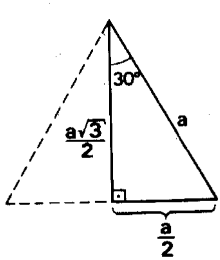
$$\text{tg } 45^o = \frac{a}{a} = 1$$



$$\text{sen } 60^o = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^o = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 60^o = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$



$$\text{sen } 30^o = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^o = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 30^o = \frac{\frac{a}{2}}{a\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

18• TRIÂNGULO PITAGÓRICOS

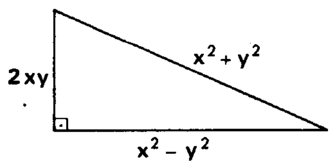
Veremos como obter triângulos retângulos cujos lados são medidos por números inteiros, triângulos êstes, chamados Pitagóricos.

Calculemos a hipotenusa a de um triângulo retângulo com um cateto $b = 2xy$ e outro $c = x^2 - y^2$

$$a^2 = (2xy)^2 + (x^2 - y^2)^2 = 4x^2y^2 + x^4 - 2x^2y^2 + y^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 \Rightarrow a^2 = (x^2 + y^2)^2 \Rightarrow a = x^2 + y^2$$

Então temos:



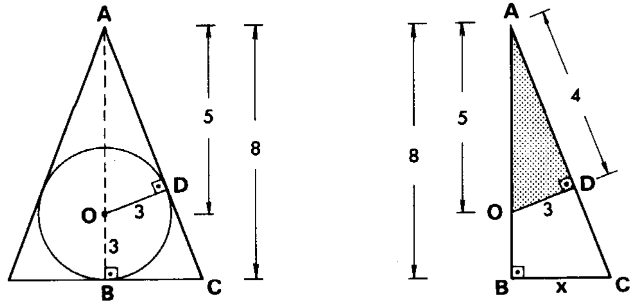
Tomando x e y inteiros, primos entre si, um dêles sendo par e x maior que y, vem a tabela.

		Cateto	Cateto	Hipotenusa
x	y	2 xy	$x^2 - y^2$	$x^2 + y^2$
2	1	4	3	5
3	2	12	5	13
4	1	8	15	17
4	3	24	7	25
5	2	20	21	29
5	4	40	16	41
6	1	12	35	37
6	5	60	11	61
7	2	28	45	53
7	4	56	33	65
7	6	84	13	85
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

IV. PROBLEMAS RESOLVIDOS.

R.1 Num triângulo isósceles de altura 8, inscreve-se uma circunferência de raio 3. Calcular a medida da base do triângulo.

SOLUÇÃO



Pelo T.P. sai AD = 4

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A} = \text{comum} \\ \hat{B} \equiv \hat{D} \text{ (retos)}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta ADO \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{8}{4} \Rightarrow x = 6$$

RESPOSTA: A base do triângulo mede 12.

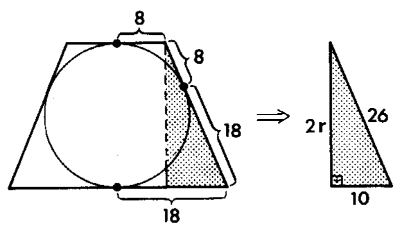
R.2 Um trapézio isósceles de bases 36 e 16 é circunscritível. Calcular o raio da circunferência inscrita

SOLUÇÃO

Usando tangência (vide figura) e teorema de Pitágoras, vem:

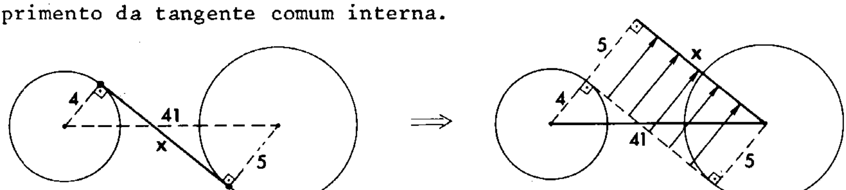
$(2r)^2 = 26^2 - 10^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2r = 24 \Rightarrow r = 12$



RESPOSTA: r = 12.

R.3 Os centros de duas circunferências estão separados de 41 m. A menor circunferência tem raio de 4m e a maior de 5m. Calcular o comprimento da tangente comum interna.

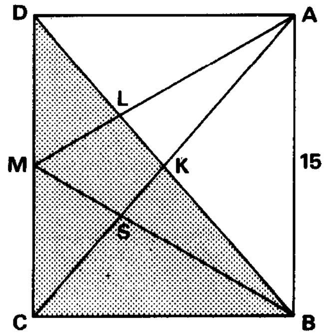


$$\text{T.P.} \Rightarrow x^2 = 41^2 - 9^2 \Rightarrow x = 40$$

RESPOSTA: 40 m

R.4 Na figura, ABCD é um retângulo, M é o ponto médio de CD e o triângulo ABM é equilátero.

Se AB = 15 calcular BS.



SOLUÇÃO

AB = 15 ⟹ BM = 15

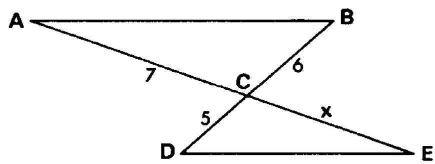
O ponto S é o baricentro do triângulo BCD, então:

$$BS = \frac{2}{3}\,BM \implies BS = 10$$

RESPOSTA: BS = 10.

V. PROBLEMAS PROPOSTOS.

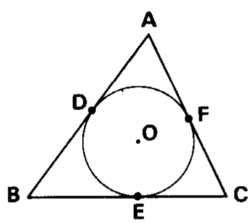
P.1 Na figura, AB e DE são paralelas. Calcule x.



P.2 No triângulo ABC de lados AB = 9, BC = 14 e AC = 11, os pontos D, E e F são pontos médios de AB, AC e BC, respectivamente. Calcular o perímetro do triângulo DEF.

P.3 Qual é a razão entre o perímetro de um triângulo equilátero com altura igual ao raio de um círculo para o perímetro do triângulo equilátero inscrito nesse círculo?

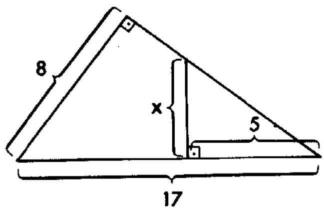
P.4 Na figura, o círculo de centro O é inscrito no triângulo ABC. BD = 4, AF = 3 e EC = 5. Qual é o perímetro do triângulo ABC?

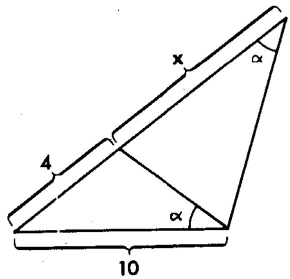


P.5 Um círculo é inscrito num triângulo ABC e tangencia os lados BC, AC e AB respectivamente em P, Q e R. Se AB = c, AC = b e BC = a e o semiperímetro é p. Calcular AR, BP e CQ.

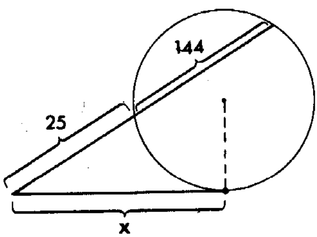
P.6 (CESCEM - 68) Seja P o ponto de tangência da circunferência inscrita no triângulo ABC, com o lado AB. Se AB = 7, BC = 6 e AC = 8, quanto vale AP?

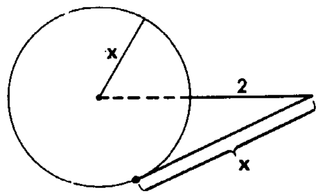
P.7 Nas figuras determinar $\underline{x}$.

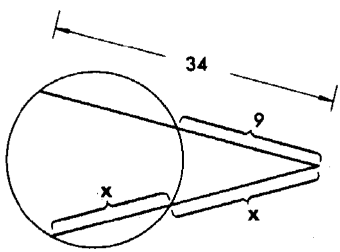


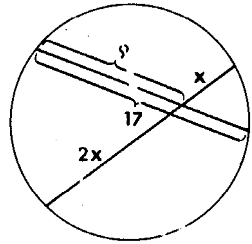


P.8 Calcular $\underline{x}$ nas figuras abaixo.









P.9 Um trapézio circunscritível tem bases medindo 8 cm e 16 cm. Calcular a altura do trapézio.

P.10 Um octógono regular é formado cortando-se triângulos retângulos isósceles nos vértices de um quadrado. Se o lado do quadrado mede 1, quanto medem os catetos do triângulo retirado?

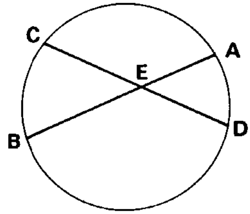
P.11 Em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é o dôbro do produto dos catetos. Calcular um dos ângulos agudos do triângulo.

P.12 A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 10 cm e o raio do círculo inscrito mede 1. Calcular o perímetro do triângulo.

P.13 Sôbre a hipotenusa AB de um triângulo retângulo ABC é construído um segundo triângulo retângulo ABD, com hipotenusa AB. Se BC = 1, AC = b e AD = 2, calcular BD.

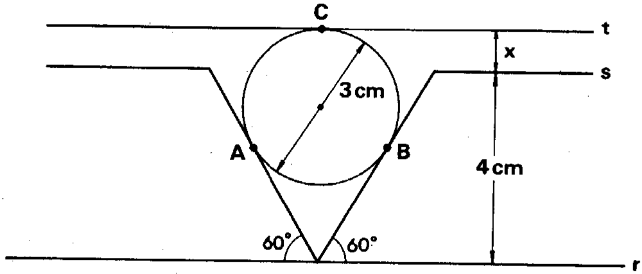
P.14 É dado um triângulo ABC, retângulo em B, P e Q são pontos médios de AC e AB, respectivamente. Sendo O a intersecção de BP e CQ e sendo AB = 24 e BC = 18, calcular OP.

P.15 Na figura sendo ED : EC = 2 : 3, AE = 6 e EB = 16, calcular o comprimento de CD.



P.16 (EPUSP - 66) Do mesmo lado de uma reta são traçados três círculos tangentes à reta e tangentes entre si dois a dois. Sabendo que dois dêles tem raio igual a 16, calcular o raio do terceiro.

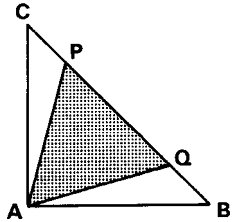
P.17 (EPUSP - 66) Os pontos A, B, C da figura são de tangência e as retas s e t, são paralelas a r. Calcular a distância x entre s e t.



P.18 (ITA - 65) Dentro de um quadrado de lado a existem cinco círculos não superpostos de mesmo raio r. O centro de um dos círculos coincide com o centro do quadrado e êle tangencia os outros quatro círculos cada um dos quais tangencia dois lados do quadrado (cada um está num canto do quadrado). Exprimir r em têrmos de a.

P.19 (FAUUSP - 67) As bases de um trapézio retângulo são b e 2b e um dos ângulos mede 60°. Calcular a altura.

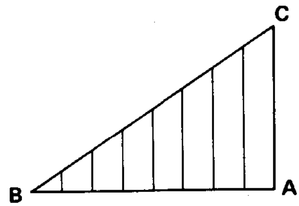
P.20 (FEIUC - Op. - 67) É dado o triângulo retângulo e isósceles ABC onde $\hat{A} = 90°$ e AB = m. Achar o lado do triângulo equilátero AQP, onde P e Q pertencem ao lado BC do triângulo dado.



VI. TESTES.

T.1 (EPUSP - 65) O cateto AB do triângulo retângulo BAC é dividido em oito partes iguais. Sete linhas paralelas ao cateto AC são traçadas até BC pelos pontos de divisão. Se AC = 10, então a soma dos sete segmentos será:

a) 33;
b) 34;
c) 35;
d) 45;
e) Nenhuma das respostas anteriores.



T.2 (EPUSP - 65) Dado um triângulo de perímetro p, unindo os pontos médios de seus lados forma-se um triângulo, unindo os pontos médios dos lados dêsse segundo triângulo forma-se um terceiro, e assim por diante, indefinidamente. A soma dos perímetros de todos os triângulos

a) é infinita;
b) é igual à p;
c) é igual à 2p;
d) é superior à 2p mas finita;
e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.3 (EPUSP - 66) AB é hipotenusa de um triângulo retângulo ABC. A mediana AD mede 7 e a mediana BE mede 4. O comprimento AB é igual a

a) $2\sqrt{13}$;
b) $5\sqrt{2}$;
c) $5\sqrt{3}$;
d) 10
e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.4 (EPUSP - 66) As bases de um trapézio isósceles circunscrito a uma circunferência medem 9 m e 6 m. Cada um dos outros dois lados do trapézio mede;

a) 4,5 m;
b) 6 m ;
c) 7,5 m;
d) 8 m;
e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.5 (EPUSP - 67) O raio do círculo inscrito num setor circular de raio r e ângulo de 60° é:

a) $\frac{r}{2}$;
b) $\frac{r}{3}$;
c) $\frac{r}{4}$;
d) $\frac{r}{5}$;
e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.6 (FEIUC - 67) Num triângulo retângulo de catetos b e c e hipotenusa a, está inscrito um círculo. O raio dêsse círculo vale:

a) $\frac{(b+c-a)}{2}$;
b) $\frac{2(a+b+c)}{3}$;
c) $\sqrt{a^2 - b^2}$;
d) $\frac{(a+b+c)}{2}$;
e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.7 (EESCUSP - 67) É dado um ponto M interno a um círculo de raio R, a uma distância d do centro. Seja AB uma corda que contém M e tal que a diferença entre $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$ é máxima; então a corda AB é:

a) aquela para o qual $\overline{AM} = 2\ \overline{BM}$;
b) aquela para o qual $\overline{AM} \times \overline{BM} = d \times R$;
c) aquela para o qual $\overline{AM} \times d = \overline{BM} \times R$
d) o diâmetro contendo M ;
e) Nenhuma das afirmações acima é correta.

T.8 (CICE - 68) Sejam MN e PQ duas cordas distintas de uma circunferência, as quais se cortam num ponto X. Assinale qual das relações abaixo é correta:

a) $\overline{MX} \times \overline{NX} = \overline{PX} \times \overline{QX}$;
b) $\overline{MX} \times \overline{QX} = \overline{NX} \times \overline{PX}$;
c) $\overline{MX}^2 + \overline{NX}^2 = \overline{PX}^2 + \overline{QX}^2$;
d) $\overline{MX} + \overline{NX} = \overline{PX} + \overline{QX}$;
e) $\overline{MX} \times \overline{MN} = \overline{PX} \times \overline{PQ}$.

T.10 (CICE - 70) Considere um quadrado Q de lado a e cinco círculos de mesmo raio r, interiores a Q, dos quais um é concêntrico com Q e tangente exteriormente aos quatro outros, e cada um dêstes tangencia dois lados consecutivos de Q. Então r é igual a:

a) $\frac{a\,(2 - \sqrt{2}\,)}{3}$;

b) $\frac{a\,(3 - \sqrt{2}\,)}{8}$;

c) $\frac{a\,(\sqrt{2} - 1)}{2}$;

d) $\frac{a}{5}$;

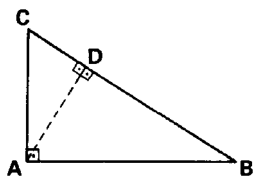
e) nada disso.

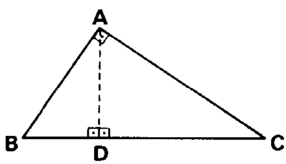
CAPÍTULO II

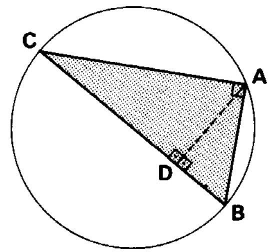
RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO

I. TRIÂNGULO RETÂNGULO.

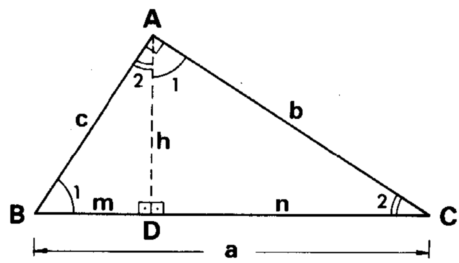
19• ELEMENTOS







Considerando um triângulo ABC, retângulo em A, e conduzindo AD perpendicular a BC, com D em BC, vamos caracterizar os elementos seguintes:



BC = a = hipotenusa,
AC = b = cateto,
AB = c = cateto,
BD = m = projeção do cateto c sôbre a hipotenusa,
CD = n = projeção do cateto b sôbre a hipotenusa,
AD = h = altura relativa à hipotenusa,

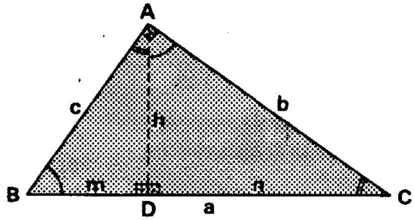
Notar que
$\hat{B} \equiv \hat{1}$
$\hat{C} \equiv \hat{2}$

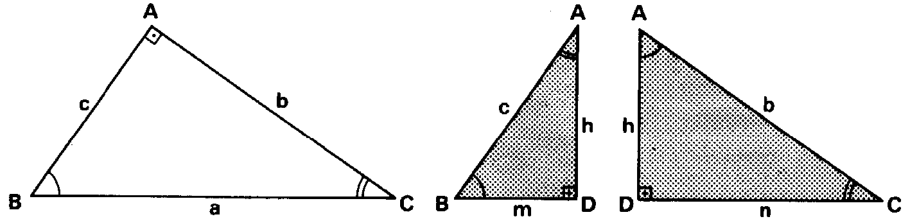
Com essa nomenclatura vamos considerar os triângulos: ΔABC, ΔDBA e ΔDAC que por terem dois ângulos ordenadamente congruentes são semelhantes:

$$\boxed{\Delta ABC \sim \Delta DBA \sim \Delta DAC}$$

20• RELAÇÕES MÉTRICAS

DEDUÇÕES:





$$\Delta ABC \sim \Delta DBA \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{h} \Rightarrow bc = ah & (4) \\ \dfrac{a}{c} = \dfrac{c}{m} \Rightarrow c^2 = am & (2) \\ \dfrac{b}{h} = \dfrac{c}{m} \Rightarrow ch = bm & (6) \end{cases}$$

$$\Delta ABC \sim \Delta DAC \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{n} \Rightarrow b^2 = an & (1) \\ \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{h} \Rightarrow bc = ah & (4) \\ \dfrac{b}{n} = \dfrac{c}{h} \Rightarrow bh = cn & (5) \end{cases}$$

$$\Delta DBA \sim \Delta DAC \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{c}{b} = \dfrac{h}{n} \Rightarrow bh = cn & (5) \\ \dfrac{c}{b} = \dfrac{m}{h} \Rightarrow ch = bm & (6) \\ \dfrac{h}{n} = \dfrac{m}{h} \Rightarrow h^2 = mn & (3) \end{cases}$$

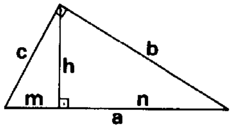
Resumindo as relações encontradas, excluindo as repetidas que estão marcadas, temos:

(1) $b^2 = a \times n$	(2) $c^2 = a \times m$	(3) $h^2 = m \times n$
(4) $b \times c = a \times h$	(5) $b \times h = c \times n$	(6) $c \times h = b \times m$

ENUNCIADOS

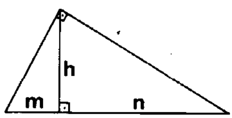
Em qualquer triângulo retângulo:

i) a medida de cada cateto é média proporcional (ou média geométrica) entre a medida da hipotenusa e a medida da projeção dêle sôbre ela.



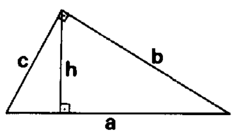
$$\Longrightarrow \quad c^2 = a \times m \qquad b^2 = a \times n$$

ii) A medida da altura relativa à hipotenusa é média proporcional (ou média geométrica) entre as medidas dos segmentos que determina na hipotenusa.



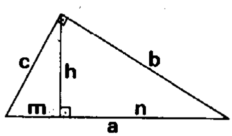
$$\Longrightarrow \quad h^2 = m \times n$$

iii) O produto das medidas dos catetos é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da altura relativa a ela.



$$\Longrightarrow \quad b \times c = a \times h$$

iv) O produto da medida de um cateto pela medida da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto da medida do outro cateto pela medida da projeção do primeiro.



$$\Longrightarrow \quad b \times h = c \times n \qquad c \times h = b \times m$$

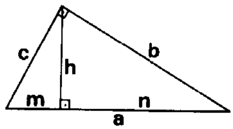
v) Teorema de Pitágoras:

A soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa.

21• ENUNCIADOS

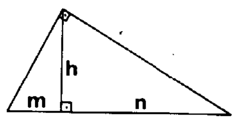
Em qualquer triângulo retângulo:

i) a medida de cada cateto é média proporcional (ou média geométrica) entre a medida da hipotenusa e a medida da projeção dêle sôbre ela.



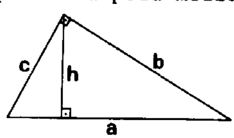
$$\Longrightarrow \quad c^2 = a \times m \qquad b^2 = a \times n$$

ii) A medida da altura relativa à hipotenusa é média proporcional (ou média geométrica) entre as medidas dos segmentos que determina na hipotenusa.



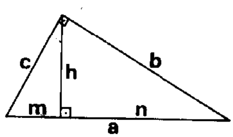
$$\Longrightarrow \quad h^2 = m \times n$$

iii) O produto das medidas dos catetos é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da altura relativa a ela.



$$\Longrightarrow \quad b \times c = a \times h$$

iv) O produto da medida de um cateto pela medida da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto da medida do outro cateto pela medida da projeção do primeiro.



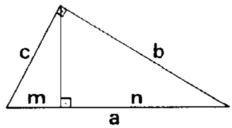
$$\Longrightarrow \quad b \times h = c \times n \qquad c \times h = b \times m$$

v) Teorema de Pitágoras:

A soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa.

DEMONSTRAÇÃO.

Para provar esta relação basta somar membro a membro (1) e (2), como segue:



$$\Longrightarrow \quad \begin{array}{r} b^2 = a \times n \\ c^2 = a \times m \\ \hline b^2 + c^2 = a\times m + a\times n \end{array} \Bigg\} + \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad b^2 + c^2 = a\,\underbrace{(m+n)}_{a} \Longrightarrow b^2 + c^2 = a^2$$

vi) A soma dos inversos dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao inverso do quadrado da medida da altura relativa à hipotenusa.

DEMONSTRAÇÃO:

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{c^2 + b^2}{b^2 \times c^2} = \frac{a^2}{b^2 \times c^2} \underset{(4)}{=} \frac{a^2}{a^2 \times h^2} = \frac{1}{h^2} \Longrightarrow \boxed{\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}}$$

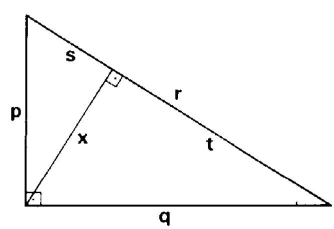
22• OBSERVAÇÕES

1ª) Dessas relações, as três primeiras ($b^2 = an$, $c^2 = am$, $h^2 = mn$) são as mais importantes e delas podem decorrer tôdas as outras. Por exemplo, fazendo (1) × (2) e depois usando a (3), vem

$$b^2 \times c^2 = a^2 \times \underbrace{m\times n}_{3} \Longrightarrow b^2 \times c^2 = a^2 \times h^2 \Longrightarrow b\times c = a\times h$$

Fazendo (1) × (3) e usando a (2) sai a (5) e
fazendo (2) × (3) e usando a (1) sai a (6) .

2ª) Na figura ao lado obteremos tôdas as relações:



$p^2 = rs$ $\qquad q^2 = rt$

$x^2 = st$ $\qquad pq = rx$

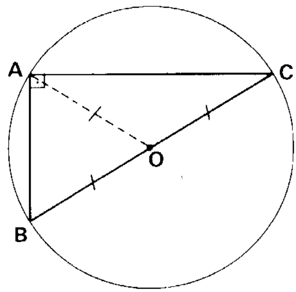
$px = qs$ $\qquad qx = pt$

$p^2 + q^2 = r^2$ $\qquad s^2 + x^2 = p^2$

$t^2 + x^2 = q^2$ $\qquad \dfrac{1}{p^2} + \dfrac{1}{q^2} = \dfrac{1}{x^2}$

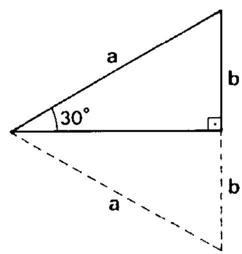
3ª) É muito útil lembrar que todo triângulo retângulo é inscritível numa circunferência cujo diâmetro é a hipotenusa. Disso decorre que:

a mediana relativa à hipotenusa (raio) *é metade da hipotenusa* (diâmetro).



4ª) Considerando um triângulo retângulo que tem um ângulo de 30º e usando o triângulo equilátero (vide figura), concluímos:

Se um triângulo retângulo tem um ângulo de 30º, o cateto oposto a êsse ângulo mede metade da hipotenusa.



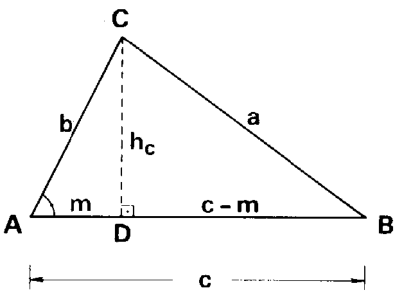
$$2b = a \Longrightarrow b = \frac{a}{2}$$

II. RELAÇÕES MÉTRICAS EM QUAISQUER TRIÂNGULOS.

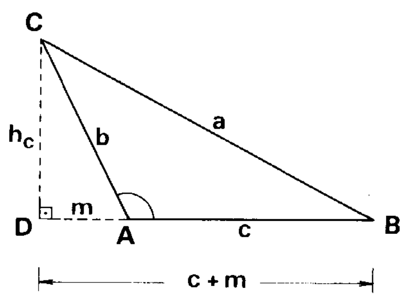
23• TEOREMA

$\boxed{A}$ Num triângulo qualquer, o quadrado do lado oposto a um *ângulo agudo* é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, *menos* duas vêzes o produto de um dêsses lados pela projeção do outro sôbre êle.

$\boxed{B}$ Num triângulo obtusângulo qualquer, o quadrado do lado oposto ao *ângulo obtuso* é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, *mais* duas vêzes o produto de um desses lados pela projeção do outro sôbre êle.



$$H\begin{cases} A < 90^o \\ m = \text{proj. de } \underline{b} \text{ sôbre } \underline{c} \end{cases}$$



$$H\begin{cases} A > 90^o \\ m = \text{proj. de } \underline{b} \text{ sôbre } \underline{c} \end{cases}$$

DEMONSTRAÇÃO (conjunta)

Conduzindo AD = h_c = altura relativa ao lado $\underline{c}$, vem:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta CDB \xrightarrow{\text{T.Pit.}} a^2 = h_c^2 + (c \pm m)^2 \\ \Delta CDA \xrightarrow{\text{T.Pit.}} h_c^2 = b^2 - m^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow a^2 = b^2 - \cancel{m^2} + c^2 \pm 2cm + \cancel{m^2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2cm} \quad (1) \qquad \Longrightarrow \boxed{a^2 = b^2 + c^2 + 2cm} \quad (2)$$

24• OBSERVAÇÕES

1ª) Teorema dos cossenos

Nos triângulos CDA vistos temos:

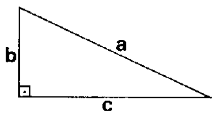
$m = b \cos A$	$m = b \cos(180 - A) = - b \cos A$
Substituindo em (1)	Substituindo em (2)
$a^2 = b^2 + c^2 - 2c\, b \cos A$	$a^2 = b^2 + c^2 + 2c(-b \cos A)$

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$$

Analogamente temos:

$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac \cos B} \quad \text{e} \quad \boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos C}$$

2ª) A relação, que vale para qualquer triângulo, vale *também* para o triângulo retângulo.



$b^2 = a^2 + c^2 - 2cm,.\ m = c \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2$

3ª) Reconhecimento da natureza de um triângulo.

Sabendo-se as medidas dos lados de um triângulo e chamando a maior de a e as outras b e c, reconhecemos a natureza de um triângulo com base nas equivalências.

$a^2 < b^2 + c^2 \iff$ triângulo acutângulo
$a^2 = b^2 + c^2 \iff$ triângulo retângulo
$a^2 > b^2 + c^2 \iff$ triângulo obtusângulo

cujas demonstrações são imediatas em vista do item 23.

25• APLICAÇÕES NOTÁVEIS

1ª) Cálculo das medianas de um triângulo.

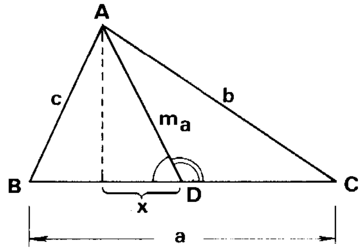
Num triângulo ABC conhecem-se as medidas dos lados a, b e c. Determinar as três medianas m_a, m_b, m_c.

$$\left.\begin{array}{l}\triangle ADC \\ \hat{D} \text{ obtuso}\end{array}\right\} \Rightarrow b^2 = m_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\,\frac{a}{2}\,x$$

$$\left.\begin{array}{l}\triangle ADB \\ \hat{D} \text{ agudo}\end{array}\right\} \Rightarrow c^2 = m_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2\,\frac{a}{2}\,x \qquad +$$

$$b^2 + c^2 = 2\,m_a^2 + \frac{a^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(b^2 + c^2) = 4\,m_a^2 + a^2 \Rightarrow \boxed{m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}}$$



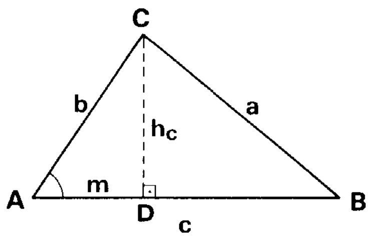
Analogamente:

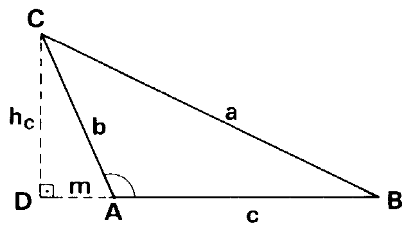
$$\boxed{m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}} \qquad \boxed{m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}}$$

OBSERVAÇÃO: Se $\hat{D} = 1$ reto, o cálculo é imediato.

2ª) <u>Cálculo das alturas de um triângulo</u>

Num triângulo ABC conhecem-se as medidas dos lados a, b e c. Calcular as três alturas:





$$\triangle ADC \xrightarrow{T.P.} h_c^2 = b^2 - m^2 \qquad (1)$$

Relação métrica $\triangle ABC \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \pm 2cm \Rightarrow$

$$\Rightarrow m = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{\mp 2c} \qquad (2)$$

$$(2) \text{ em } (1) \Rightarrow h_c^2 = b^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{\mp 2c}\right)^2 = \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2}$$

$$= \quad 4c^2h_c^2 = \left[2bc + b^2 + c^2 - a^2\right]\left[2bc - b^2 - c^2 + a^2\right] =$$

$$= \left[(b^2 + 2bc + c^2) - a^2\right] \cdot \left[a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)\right] =$$

$$= \left[(b+c)^2 - a^2\right] \cdot \left[a^2 - (b-c)^2\right] =$$

$$= \left[(b+c+a)(b+c-a)\right]\left[(a+b-c)(a-b+c)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4c^2h_c^2 = (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \quad (3)$$

ARTIFÍCIO:

$a + b + c = 2p$ (notar que $\underline{p}$ e *semi-perímetro* do triângulo)

$$-a+b+c = -a+b+c+a-a = \overbrace{a+b+c}^{2p} - 2a = 2(p-a)$$

$$a-b+c = a-b+c+b-b = a+b+c-2b = 2(p-b)$$

$$a+b-c = a+b-c+c-c = a+b+c-2c = 2(p-c)$$

Substituindo em (3)

$$4\,c^2h_c^2 = 2p \cdot 2(p-a)\cdot 2(p-b)\cdot 2(p-c) \qquad \boxed{h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

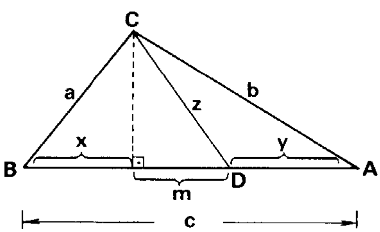
Anàlogamente

$$\boxed{h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p.c)}} \qquad \boxed{h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

3ª) <u>Relação de Stewart - R.S.</u>

Dado um triângulo ABC e sendo D um ponto do lado AB (vide figura), vale a relação: $a^2y + b^2x - z^2c = cxy$

DEMONSTRAÇÃO:



$$\Delta BCD \Rightarrow a^2 = x^2 + z^2 \mp 2xm \quad (1)$$

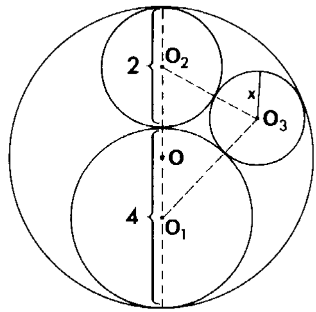
$$\Delta ACD \Rightarrow b^2 = y^2 + z^2 \pm 2ym \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} (1)\cdot y \Rightarrow a^2y = x^2y + z^2y \mp 2xym \\ (2)\cdot x \Rightarrow b^2x = xy^2 + z^2x \pm 2xym \end{array}\right\} +$$

$$a^2y + b^2x = xy(x+y) + z^2(x+y) \Rightarrow \boxed{a^2y + b^2x - z^2c = cxy}$$

APLICAÇÃO

Calcular o raio $\underline{x}$ na figura ao lado.



Temos as circunferências: $C(O,3)$, $C_1(O_1, 2)$, $C_2(O_2, 1)$ e $C_3(O_3, x)$.

No triângulo $O_1O_2O_3$ temos:

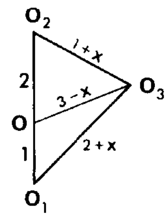
$O_1O_2 = 3$, $O_1O_3 = 2 + x$, $O_2O_3 = 1 + x$

e ainda

$OO_1 = 1$, $OO_2 = 2$ e $OO_3 = 3 - x$

Aplicando a Relação de Stewart ,

vem:



$(1 + x)^2 \cdot 1 + (2 + x)^2 \cdot 2 - (3 - x)^2 \cdot 3 =$

$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \Rightarrow 28x = 24 \Rightarrow x = \frac{6}{7}$

RESPOSTA: O raio pedido mede $\frac{6}{7}$.

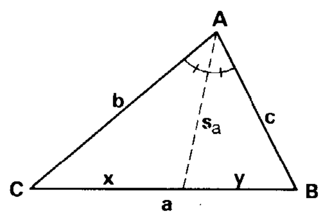
4ª) <u>Cálculo das bissetrizes internas de um triângulo.</u>

No triângulo ABC conhecem-se as medidas dos lados $\underline{a}$, $\underline{b}$ e $\underline{c}$. Determinar as medidas das três bissetrizes internas s_a, s_b e s_c.

Na figura ao lado:

dados: a, b, c

incógnitas: x, y, s_a



$x + y = a$

$$s_a \text{ bissetriz} \Rightarrow \frac{x}{b} = \frac{y}{c} \Rightarrow \frac{\overbrace{x + y}^{a}}{b + c} = \frac{x}{b} = \frac{y}{c} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{ab}{b + c} \\ y = \dfrac{ac}{b + c} \end{cases}$$

Considerando a Relação de Stewart no ΔABC

$$b^2 y + c^2 x - s_a^2 \cdot a = x \cdot y \cdot a$$

e substituindo x e y pelos valôres calculados acima, vem:

$$b^2 \cdot \frac{\cancel{a}c}{b + c} + c^2 \cdot \frac{\cancel{a}b}{b + c} - s_a^2 \cdot \cancel{a} = \frac{ab}{b + c} \cdot \frac{ac}{b + c} \cdot \cancel{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2 c(b + c) + bc^2(b + c) - bca^2 = s_a^2 (b + c)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (b+c)^2 s_a^2 = bc\,[b(b+c) + c(b+c) - a^2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (b+c)^2 s_a^2 = bc\,[(b+c)^2 - a^2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (b+c)^2 s_a^2 = bc\underbrace{(b+c+a)}_{2p}\underbrace{(b+c-a)}_{2(p-a)} \Rightarrow$$

$$\boxed{s_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{b\,c\,p\,(p-a)}}$$

Analogamente:

$$\boxed{s_b = \frac{2}{a+c}\sqrt{ac\;p(p-b)}} \qquad \boxed{s_c = \frac{2}{a+b}\sqrt{ab\;p(p-c)}}$$

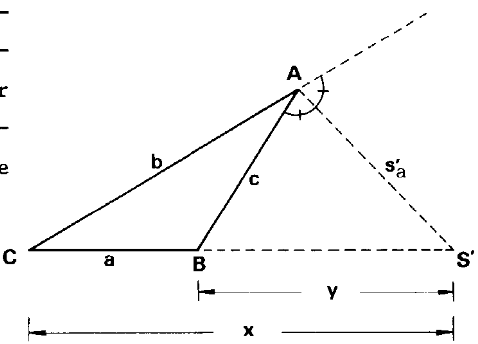
5ª) <u>Cálculo das bissetrizes externas de um triângulo</u>

Num triângulo ABC, conhecem-se as medidas dos lados $\underline{a}$, $\underline{b}$ e $\underline{c}$. Determinar as medidas das três bissetrizes externas s'_a, s'_b e s'_c.

Na figura ao lado:

dados: a, b, c

Incógnitas: x, y, s'_a



$$x - y = a$$

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{c} \Rightarrow \frac{\overbrace{x-y}^{a}}{b-c} = \frac{x}{b} = \frac{y}{c} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{ab}{b-c} \\[2ex] y = \dfrac{ac}{b-c} \end{cases}$$

Considerando a Relação de Stewart no $\Delta AS'C$

$$b^2 y + s'^2_a \cdot a - c^2 x = a \cdot y \cdot x$$

e substituindo x e y pelos valôres calculados acima, vem:

$$b^2 \cdot \frac{\cancel{a}c}{b-c} + s'^2_a \cdot \cancel{a} - c^2 \cdot \frac{\cancel{a}b}{b-c} = \cancel{a} \cdot \frac{ac}{b-c} \cdot \frac{ab}{b-c} \Rightarrow$$

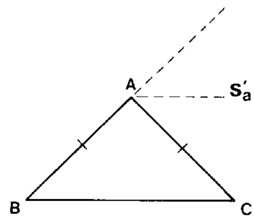
$$\Rightarrow b^2\,c(b-c) + s'^2_a\,(b-c)^2 - bc^2(b-c) = bc\,a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (b-c)^2 s'^2_a = bc\,[a^2 - b(b-c) + c(b-c)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (b-c)^2 s_a'^2 = bc\left[a^2 - (b-c)^2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (b-c)^2 s_a'^2 = bc\ \underbrace{(a+b-c)}_{2(p-c)}\ \underbrace{(a-b+c)}_{2(p-b)}$$

$$\Rightarrow s_a' = \frac{2}{b-c}\sqrt{bc(p-b)(p-c)}$$



Observando que

se $b > c$ toma-se $b - c$

se $b < c$ toma-se $c - b$,

a diferença $b - c$ deve ser tomada em módulo.

Se $b = c$, a expressão de s_a' não tem sentido o que ocorre pelo fato de a bissetriz do ângulo externo do vértice de um triângulo isósceles ser paralela à base.

CONCLUSÃO:

$$\boxed{s_a' = \frac{2}{|b-c|}\sqrt{bc(p-b)(p-c)}}$$

Analogamente:

$$\boxed{s_b' = \frac{2}{|a-c|}\sqrt{ac(p-a)(p-c)}} \qquad \boxed{s_c' = \frac{2}{|a-b|}\sqrt{ab(p-a)(p-b)}}$$

EXEMPLO:

Dado um triângulo de lados $a = 5$, $b = 7$, $c = 8$,

Calcular: m_a, m_b, m_c; h_a, h_b, h_c; s_a, s_b, s_c; s_a', s_b', s_c'.

SOLUÇÃO:

$a = 5$ $\quad b = 7$ $\quad c = 8$ $\quad 2p = 20$ $\quad p = 10$ $\quad p - a = 5$

$p - b = 3$ $\quad p - c = 2$

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2(49+64)-25} = \frac{1}{2}\sqrt{201}$$

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2(25+64)-49} = \frac{1}{2}\sqrt{129}$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2(25+49)-64} = \sqrt{21}$$

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{2}{5}\sqrt{10\cdot 5\cdot 3\cdot 2} = \frac{2}{5}\cdot 10\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{2}{7}\cdot 10\cdot\sqrt{3} = \frac{20\sqrt{3}}{7}$$

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{P(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{2}{8}\cdot 10\cdot\sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$s_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)} = \frac{2}{15}\sqrt{7\cdot 8\cdot 10\cdot 5} = \frac{8\sqrt{7}}{3}$$

$$s_b = \frac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)} = \frac{2}{13}\sqrt{5\cdot 8\cdot 10\cdot 3} = \frac{40\sqrt{3}}{13}$$

$$s_c = \frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)} = \frac{2}{12}\sqrt{5\cdot 7\cdot 10\cdot 2} = \frac{5\sqrt{7}}{3}$$

$$s'_a = \frac{2}{|b-c|}\sqrt{bc(p-b)(p-c)} = \frac{2}{1}\sqrt{7\cdot 8\cdot 3\cdot 2} = 8\sqrt{21}$$

$$s'_b = \frac{2}{|a-c|}\sqrt{ac(p-a)(p-c)} = \frac{2}{3}\sqrt{5\cdot 8\cdot 5\cdot 2} = \frac{40}{3}$$

$$s'_c = \frac{2}{|a-b|}\sqrt{ab(p-a)(p-c)} = \frac{2}{2}\sqrt{5\cdot 7\cdot 5\cdot 3} = 5\sqrt{21}$$

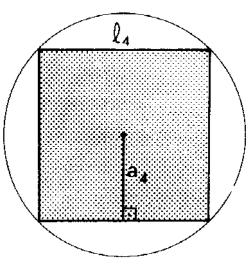
III. CÁLCULO DE LADO E APÓTEMA DOS POLÍGONOS REGULARES.

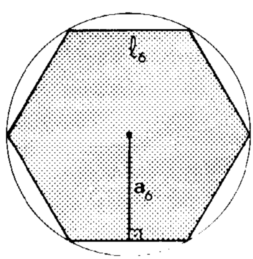
26• NOMENCLATURA

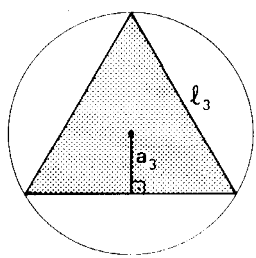
Indicaremos por ℓ_n o lado do polígono regular de $\underline{n}$ lados e por a_n o apótema do polígono regular de $\underline{n}$ lados.

Apótema é o segmento cujas extremidades são o centro e o ponto médio do lado.

EXEMPLOS





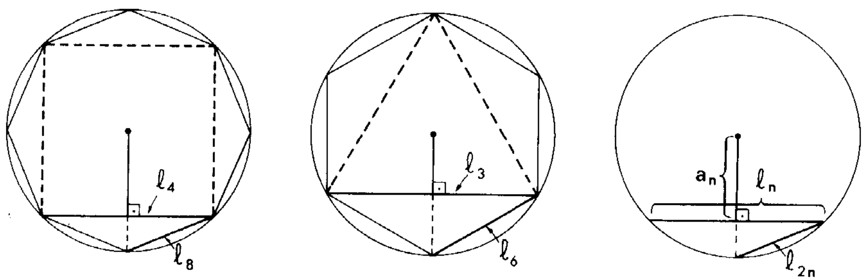


Usaremos o símbolo ℓ_{2n} para indicar o lado do polígono regular de $2n$ lados.

Se o ℓ_n é o ℓ_4, o ℓ_{2n} é o ℓ_8

Se o ℓ_n é o ℓ_6, o ℓ_{2n} é o ℓ_{12}, e assim por diante.

Notemos que de um modo geral temos:

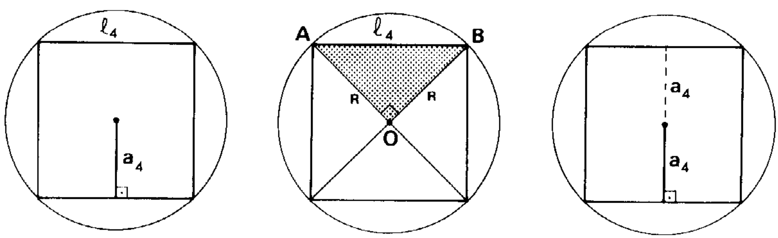


27• PROBLEMAS

Veremos agora 7 problemas resolvidos de cálculo de lado e apótema. O interêsse é uma preparação para se chegar ao comprimento da circunferência.

PROBLEMA 1. Dado o raio do círculo circunscrito, calcular o lado e o apótema do quadrado.

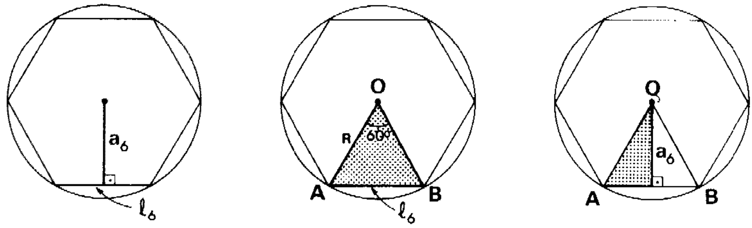
Na figura, dado o R, calcular o ℓ_4 e o a_4.



$$\Delta OAB \xrightarrow{\text{T.P.}} \ell_4^2 = R^2 + R^2 \Rightarrow \boxed{\ell_4 = R\sqrt{2}} \qquad a_4 = \frac{1}{2}\ell_4 \Rightarrow \boxed{a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}}$$

PROBLEMA 2. Dado o raio do círculo circunscrito, calcular o lado e o apótema do hexágono regular.

Na figura, dado o R, calcular ℓ_6 e o a_6.



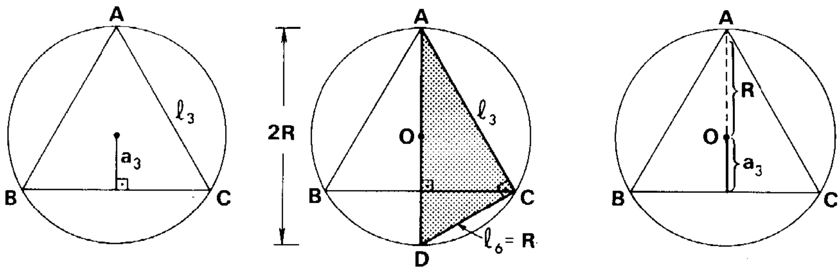
$$\left.\begin{array}{l} \text{No } \Delta AOB \text{ temos: } \hat{O} = \dfrac{360^o}{6} = 60^o \\ OA = OB \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{O} = \hat{A} = \hat{B} = 60^o \Rightarrow$$

$\Rightarrow \Delta AOB$ é equilátero $\Rightarrow$ $\boxed{\ell_6 = R}$

a_6 é a altura do triângulo equilátero de lado R $\Rightarrow$ $\boxed{a_6 = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}}$

PROBLEMA 3. Dado o raio do círculo circunscrito, calcular o lado e o apótema do triângulo equilátero.

Na figura, dado R, calcular o ℓ_3 e o a_3.



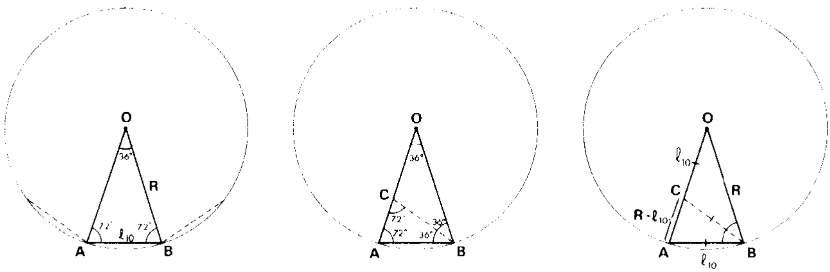
Note que, sendo BC = ℓ_3, então CD = ℓ_6 = R e AD é diâmetro.

ΔACD, retângulo em C $\xrightarrow{T.P.}$ $\ell_3^2 = (2R)^2 - R^2 = 3R^2 \Rightarrow$ $\boxed{\ell_3 = R\sqrt{3}}$

O é o baricentro do $\Delta ABC \Rightarrow 2 \cdot a_3 = R \Rightarrow$ $\boxed{a_3 = \dfrac{R}{2}}$

PROBLEMA 4. Dado o raio do círculo circunscrito, calcular o lado do decágono regular.

Na figura, dado o R, calcular o ℓ_{10}.



Sendo AB = ℓ_{10}, então $A\hat{O}B = \frac{1}{10} \cdot 360^o = 36^o \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = 72^o$.

Conduzindo BC, bissetriz de $\hat{B}$ vem:

ΔBAC é isósceles ($\hat{A} = \hat{C} = 72^o$) $\Rightarrow$ (BC) = ℓ_{10}

ΔCOB é isósceles ($\hat{O} = \hat{B} = 36^o$) $\Rightarrow$ (OC) = (BC) = ℓ_{10}

Então: (OC) = ℓ_{10} e (CA) = R − ℓ_{10}

Aplicando o teorema da bissetriz interna (BC é bissetriz no ΔAOB) vem:

$$\frac{\ell_{10}}{R} = \frac{R - \ell_{10}}{\ell_{10}} \Rightarrow \ell_{10}^2 = R\,(R - \ell_{10}) \Rightarrow \ell_{10}^2 + R\ell_{10} - R^2 = 0$$

$$\Rightarrow \ell_{10} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 + 4R^2}}{2}$$

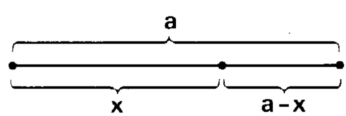
Desprezando a solução negativa que não convém, temos

$$\boxed{\ell_{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\, R}$$

NOTA: SEGMENTO ÁUREO

DEFINIÇÃO: x é a medida do segmento áureo de um segmento de medida a, se e sòmente se,

$$\frac{x}{a} = \frac{a - x}{x}$$



A razão $\frac{x}{a}$ é dita razão áurea e x é também a medida do segmento maior da secção áurea do segmento de medida a .

Resolvendo a equação obtém-se $x = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} \cdot a$

Em vista da definição acima e da dedução do problema 4 onde se tem

$$\frac{\ell_{10}}{R} = \frac{R - \ell_{10}}{\ell_{10}}$$

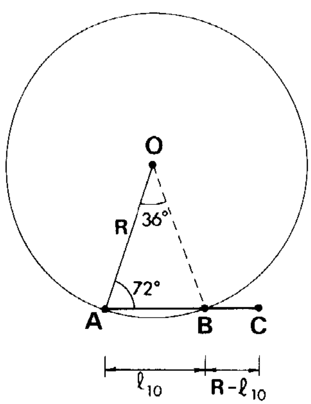
concluímos que o ℓ_{10} *é o segmento áureo do raio.*

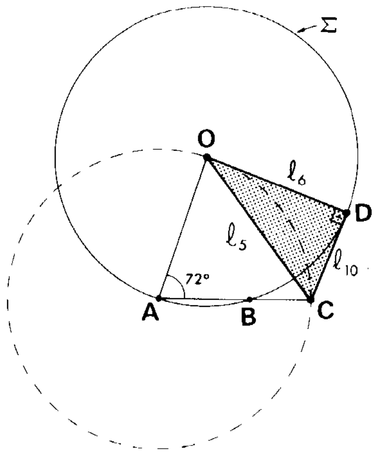
PROBLEMA 5. Dado o raio do círculo circunscrito, calcular o lado do pentágono regular.

Dado R, calcular o ℓ_5.

Inicialmente provaremos a seguinte propriedade.

> O ℓ_5 é hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são o ℓ_{10} e o ℓ_6 (ℓ_5, ℓ_6, ℓ_{10} relativos a um mesmo raio R).





Seja $(AB) = \ell_{10}$ e na reta AB um ponto C tal que $(AC) = R$. Considerando a circunferência de centro A e raio R, o ângulo central $\hat{A} = 72^o$, faz corresponder $OC = \ell_5$ (basta notar que

$$72^o = \frac{1}{5} \cdot 360^o).$$

Conduzindo por C, a tangente CD à circunferência Σ de centro O e raio R, temos:

Potência de C em relação a $\Sigma \Rightarrow (CD)^2 = \underset{R}{(CA)} \times \underset{R-\ell_{10}}{(CB)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (CD)^2 = R\,(R - \ell_{10}) \xrightarrow[\text{anterior}]{\text{Problema}} \boxed{CD = \ell_{10}}$$

Considerando o triângulo ODC, retângulo em D, temos:

$OC = \ell_5$ = hipotenusa, $CD = \ell_{10}$ = cateto e $OD = R = \ell_6$ = cateto

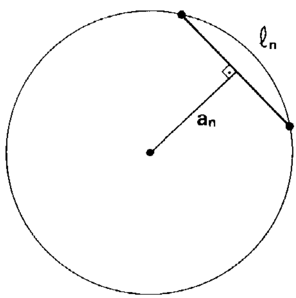
Cálculo do ℓ_5

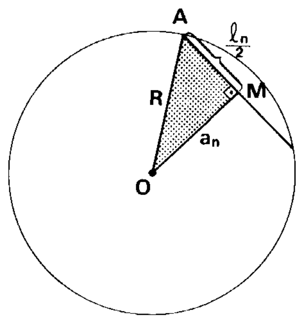
Aplicando o T.P. vem:

$$\ell_5^2 = \ell_6^2 + \ell_{10}^2 \Rightarrow \ell_5^2 = R^2 + \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cdot R\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell_5^2 = \frac{R^2}{4}(10 - 2\sqrt{5}) \Rightarrow \boxed{\ell_5 = \frac{R}{2} \cdot \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$$

PROBLEMA 6. Deduzir a fórmula geral do apótema. Isto é, dados R e ℓ_n, calcular a_n.





ΔAMO retângulo em M $\Rightarrow a_n^2 = R^2 - \dfrac{\ell_n^2}{4} \Rightarrow \boxed{a_n = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - \ell_n^2}}$

EXEMPLO:

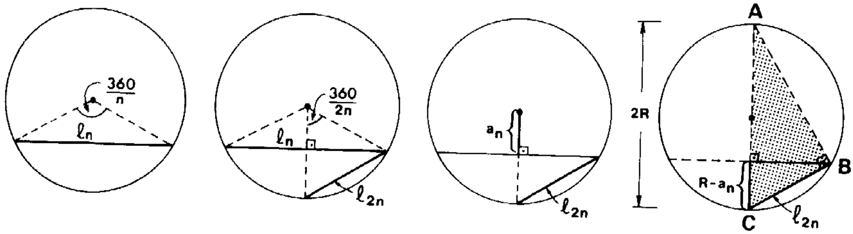
Para calcular o a_{10} em função do raio R da circunferência circunscrita, basta substituir ℓ_n por ℓ_{10} ($\ell_{10} = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} \cdot R$).

E assim procedendo, obtemos: $\boxed{a_{10} = \frac{R}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$

Analogamente, substituindo o ℓ_n por ℓ_5 ($\ell_5 = \dfrac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$) na expressão de a_n, obtemos

$$\boxed{a_5 = \frac{R}{4}(\sqrt{5} + 1)}$$

PROBLEMA 7. Deduzir uma expressão que da o ℓ_{2n} em função ℓ_n e de R (raio da circunferência circunscrita.)



ΔABC, retângulo em B, relações métricas $\Rightarrow \ell_{2n}^2 = 2R\,(R - a_n)$

Substituindo a_n por $\frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - \ell_n^2}$ (problema 6) vem:

$$\ell_{2n}^2 = 2R\,\left(R - \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - \ell_n^2}\right) \Rightarrow \ell_{2n}^2 = R\,\left(2R - \sqrt{4R^2 - \ell_n^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\ell_{2n} = \sqrt{R\,\left(2R - \sqrt{4R^2 - \ell_n^2}\right)}}$$

OBSERVAÇÃO: A expressão do ℓ_{2n} nos indica que sabendo o valor, por exemplo do ℓ_6, pode-se obter o de ℓ_{12}; com o de ℓ_{12} em lugar do ℓ_n, obtém-se o de ℓ_{24}; com o de ℓ_{24} em lugar do ℓ_n, obtém-se o de ℓ_{48} e assim por diante.

IV. COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA.

28• NOTA INICIAL

O interêsse dêste item é dar uma noção sôbre o cálculo do *perímetro do círculo* e o *comprimento da circunferência.*

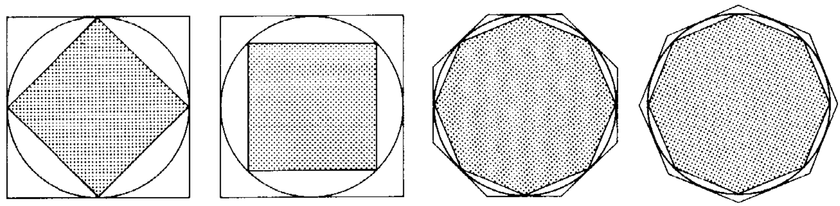
Serão citadas três propriedades que nos conduzirão ao resultado visado. Não serão feitas demonstrações rigorosas de tais propriedades, porém ficará clara a percepção das conclusões além da sequência lógica que se deve seguir.

29• PROPRIEDADE 1

"Dada uma circunferência qualquer, o perímetro de qualquer polígono convexo nela inscrito é menor que o perímetro de qualquer polígono a ela circunscrito".

Esta propriedade é geral mas é suficiente trabalhar com polígonos regulares para percebê-la.

Seja uma circunferência de raio R. Consideremos um quadrado inscrito e o quadrado circunscrito correspondente.



Note-se que $R\sqrt{2}$ e $\frac{R\sqrt{2}}{2}$ são lado e apótema do quadrado inscrito, enquanto 2R e R são, respectivamente lado e apótema do quadrado circunscrito.

Sendo p_4 e P_4 os respectivos perímetros temos $p_4 < P_4$.

Dobrando-se o número de lados (e isso é possível, vide fórmula do ℓ_{2n}) temos:

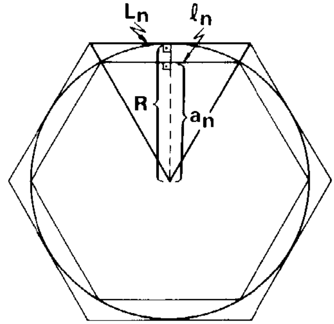
$$p_4 < p_8 \quad \text{e} \quad P_8 < P_4 \quad \text{e ainda} \quad p_4 < p_8 < P_8 < P_4$$

Repetindo-se a operação acima, e ela pode ser repetida indefinidamente, temos:

$$p_4 < p_8 < p_{16} < p_{32} < \dots < P_{32} < P_{16} < P_8 < P_4$$

O resultado acima foi obtido iniciando-se com o quadrado. Trabalhando-se com polígono regular de $\underline{n}$ lados temos resultado análogo, sendo bom notar que:

P_n e R perímetro e apótema do polígono circunscrito p_n e a_n perímetro e apótema do polígono inscrito são relacionados por semelhança entre triângulos, como segue.



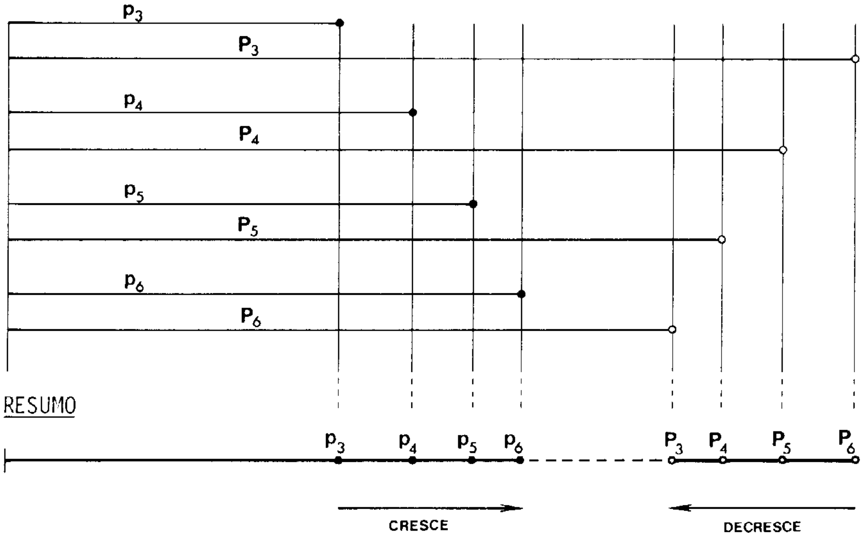
$$\frac{L_n}{\ell_n} = \frac{R}{a_n} \Rightarrow \frac{P_n}{p_n} = \frac{R}{a_n}$$

(Notemos que conhecendo p_n, a_n e R, calculamos P_n).

Assim temos também

$$p_6 < p_{12} < p_{24} < p_{48} < \dots < P_{48} < P_{24} < P_{12} < P_6$$

De um modo geral, aumentando-se o número de lados, o perímetro dos polígonos regulares inscritos (p_n) *cresce* enquanto o perímetro dos polígonos regulares circunscritos (P_n) *decresce*, permanecendo sempre $p_n < P_n$. A figura abaixo ilustra êsse fato.



30• PROPRIEDADE 2

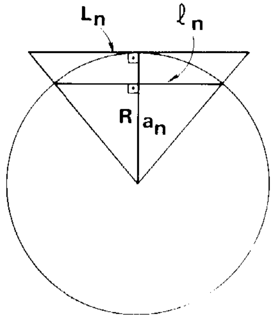
"Dada uma circunferência qualquer e fixado um segmento $\underline{k}$, arbitrário, pode-se construir dois polígonos, um inscrito e outro circunscrito à circunferência, tais que a diferença entre seus perímetros seja menor que o segmento $\underline{k}$ fixado".

Esta propriedade é geral mas pode ser "percebida" através de polígonos regulares, com mais de quatro lados, como segue:

sendo:

p_n e a_n, perímetro e apótema do inscrito

P_n e R, perímetro e apótema do circunscrito



Conforme já vimos, pela semelhança sai

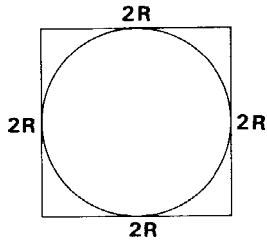
$$\frac{P_n}{p_n} = \frac{R}{a_n}$$

Com propriedades de proporções, vem

$$\frac{P_n - p_n}{P_n} = \frac{R - a_n}{R} \qquad P_n - p_n = \frac{P_n}{R}(R - a_n)$$

Mas, para todo n maior que 4, temos:

$P_n < P_4$ portanto $P_n < 8R$

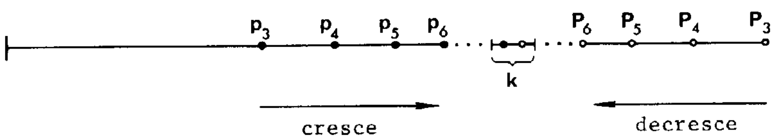


e, daí, vem:

$$P_n - p_n < \frac{8R}{R}(R - a_n) \Rightarrow P_n - p_n < 8(R - a_n)$$

Aumentando-se indefinidamente o número de lados (dobrando-se, por exemplo) a diferença $R - a_n$ tende para o segmento nulo. Então,

$$P_n - p_n < k, \text{ sendo } \underline{k} \text{ fixado}$$

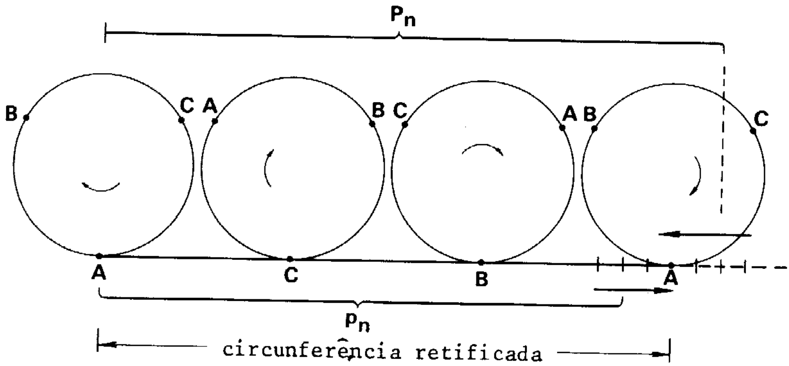


NOTA: As duas propriedades vistas, aliadas ao postulado da continuidade, traduzem o enunciado:

"Dada uma circunferência qualquer, existe *UM ÚNICO SEGMENTO* que é maior que o perímetro de qualquer dos polígonos convexos inscritos e menor que o perímetro de qualquer dos polígonos circunscritos a essa circunferência".

31• DEFINIÇÕES

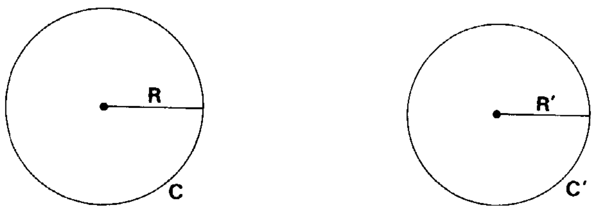
a) Dada uma circunferência, o segmento maior que os perímetros de todos os polígonos convexos inscritos e menor que os perímetros de todos os polígonos circunscritos é chamado *SEGMENTO RETIFICANTE* da circunferência, ou *CIRCUNFERÊNCIA RETIFICADA* ou ainda *PERÍMETRO DO CÍRCULO* definido pela circunferência.



b) O comprimento do segmento retificante da circunferência, ou circunferência retificada ou perímetro do círculo é chamado *comprimento da circunferência.*

32• PROPRIEDADE 3

"A razão entre o perímetro do círculo e seu diâmetro é um número constante representado por π."



Sejam duas circunferências de comprimento C e C' e raios R e R', respectivamente, e consideremos polígonos regulares de mesmo número de lados inscritos e circunscritos nessas circunferências.

Com a nomenclatura usada até aqui e graças à semelhança entre os polígonos, vem:

$$\frac{p_n}{p'_n} = \frac{R}{R'} \qquad \text{e} \qquad \frac{P_n}{P'_n} = \frac{R}{R'}$$

Devido as propriedades anteriores vem:

$$p_n < C < P_n \qquad \text{e} \qquad p'_n < C' < P'_n$$

Donde:

$$\frac{p_n}{2R} < \frac{C}{2R} < \frac{P_n}{2R} \qquad \text{e} \qquad \frac{p'_n}{2R'} < \frac{C'}{2R'} < \frac{P'_n}{2R'}$$

Logo,

$$\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}$$

chamando essa razão de π , vem:

$$\frac{C}{2R} = \pi \implies \boxed{C = 2\pi R}$$

33• OBSERVAÇÃO

Para se ter uma noção do número π é só analisar a tabela abaixo.

n - nº lados de um polígono regular

P_c - perímetro dos circunscritos

p_i - perímetro dos inscritos

R - raio da circunferência

Observe, pela tabela, como vai "nascendo" o número π .

n	$\frac{p_i}{2R}$	$\frac{P_c}{2R}$
6	3,00000	3,46411
12	3,10582	3,21540
24	3,13262	3,15967
48	3,13935	3,14609
96	3,14103	3,14272
192	3,14145	3,14188

Pela tabela chegamos até $\boxed{3{,}141}45 < \pi < \boxed{3{,}141}88$

Pode-se pensar que a tabela acima foi obtida usando o fato de que sabendo o ℓ_6 pela fórmula do ℓ_{2n}, sabe-se o ℓ_{12}; sabendo-se o ℓ_{12} sabe-se o ℓ_{24} e assim sucessivamente.

Note que conforme se aumenta o número de lados obtém-se valôres aproximados de π com maior precisão (vão surgindo os algarismos do número π). Com um polígono de 192 lados, chegamos a 4 algarismos do número π .

Por ser útil temos:

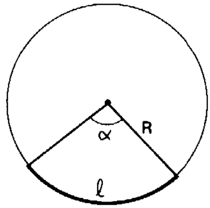
$$\pi = 3{,}1415926535\ldots \qquad \frac{1}{\pi} = 0{,}3183098861\ldots$$

34• COMPRIMENTO DE UM ARCO DE CIRCUNFERÊNCIA

"O comprimento de um arco de circunferência (ℓ) é proporcional à sua medida (α)".

Para α em graus

$$\left.\begin{matrix} 360^o & — & 2\pi R \\ \alpha^0 & — & \ell \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\ell = \frac{\pi R \alpha}{180}}$$



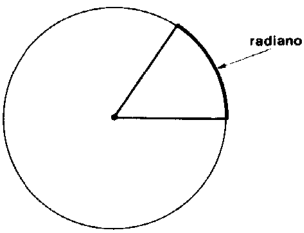
Para α em radianos

$$\left.\begin{matrix} 2\pi \text{ rad} & — & 2\pi R \\ \alpha \text{ rad} & — & \ell \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\ell = R\alpha}$$

Em particular, numa circunferência de raio unitário, o comprimento de um arco é numéricamente igual à sua medida em radianos.

OBSERVAÇÃO:

Chama-se radiano (rad) todo arco de circunferência cujo comprimento é igual ao comprimento do raio da circunferência que o contém.

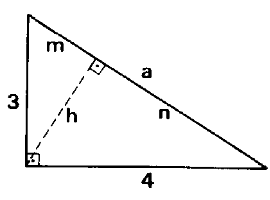


Numa circunferência (comprimento = $2\pi R$) há 2π radianos e por conseguinte

$$1 \text{ rad} = \frac{360^o}{2\pi} = 180^o \times 0{,}31831 = 57^o 17' \, 38{,}4...''$$

V. PROBLEMAS RESOLVIDOS.

R.5 Na figura determinar os elementos indicados.



SOLUÇÃO

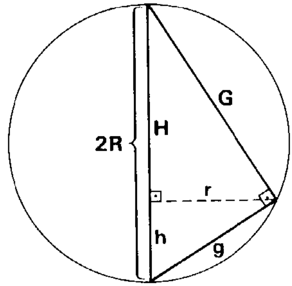
Sendo $c = 3$ e $b = 4$ vem:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$$

$$m = \frac{3^2}{5} = \frac{9}{5} \qquad n = \frac{4^2}{5} = \frac{16}{5} \qquad h = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}$$

R.6 Escrever 10 relações métricas com os elementos indicados na figura.

SOLUÇÃO



$G^2 = 2R \cdot H$ $\qquad g^2 = 2R \cdot h$

$r^2 = H \cdot h$ $\qquad Gg = 2R \cdot r$

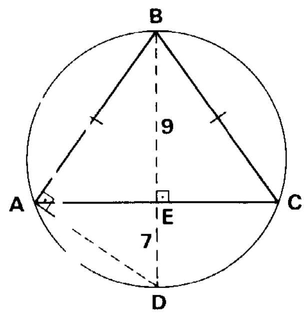
$Gr = gH$ $\qquad gr = Gh$

$G^2 + g^2 = (2R)^2$ $\qquad H^2 + r^2 = G^2$

$h^2 + r^2 = g^2$ $\qquad \dfrac{1}{G^2} + \dfrac{1}{g^2} = \dfrac{1}{r^2}$

R.7 ABC é um triângulo inscrito num círculo. A reta que contém a altura BE, intercepta a circunferência em D. Se AB = BC, BD = 16 e DE = 7, calcular AB.

SOLUÇÃO



Construindo a figura de acôrdo com o enunciado temos:

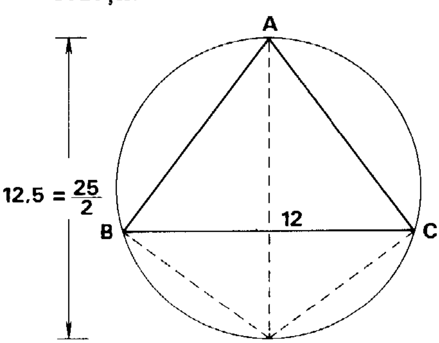
Do ΔBAD retângulo em A vem:

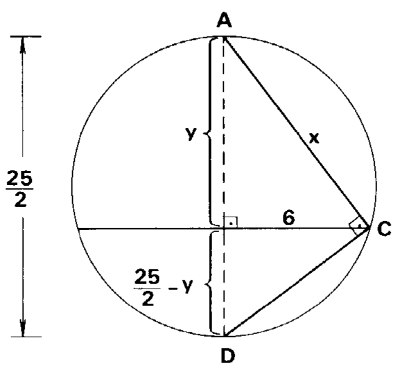
$(AB)^2 = (BD) \times (BE) \Rightarrow$

$\Rightarrow (AB)^2 = 16 \cdot 9 \Rightarrow AB = 12$

R.8 Um triângulo isósceles de base 12 cm é inscrito numa circunferência de 12,5 cm de diâmetro.
Calcular a medida dos lados congruentes do triângulo.

SOLUÇÃO





Do ΔACD, retângulo em C vem:

$$x^2 = \frac{25}{2} \cdot y \quad (1) \qquad e \qquad 6^2 = y\left(\frac{25}{2} - y\right) \quad (2)$$

De (2) sai: $2y^2 - 25y + 72 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} y_1 = 8 \\ y_2 = \frac{9}{2} \end{cases}$

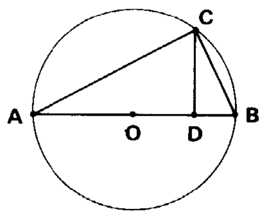
Substituindo em (1) vem:

$y_1 = 8 \Rightarrow x_1 = 10 \qquad y_2 = \frac{9}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{15}{2}$

RESPOSTA: 10 cm ou 7,5 cm (notar que existem dois triângulos nas condições do problema).

R.9 Na figura, AOB é o diâmetro do círculo de centro O. $\widehat{AC} = 120^o$, $AB = 24$ e $CD \perp AB$.

Calcular o comprimento de BD.



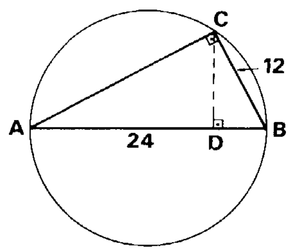
SOLUÇÃO

$\widehat{AC} = 120^o \Rightarrow \widehat{BC} = 60^o \Rightarrow \hat{A} = 30^o \Rightarrow$

$\Rightarrow (BC) = \frac{1}{2}(AB) \Rightarrow BC = 12.$

$(AB)\cdot(BD) = (BC)^2 \Rightarrow 24\cdot(BD) =$

$= 12^2 \Rightarrow BD = 6.$



RESPOSTA: $BD = 6$.

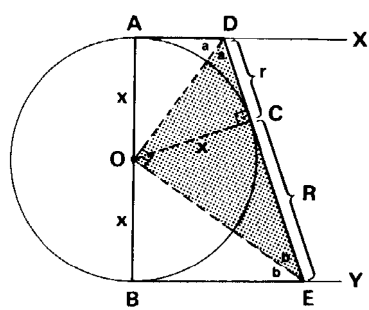
R.10 Seja um semi-círculo de diâmetro $AB = 2x$ e as tangentes AX e BY ao semi-círculo. A tangente em um ponto C, qualquer, da semi-circunferência intercepta AX em D e BY em E. Se $CD = r$ e $BE = R$, provar que $x^2 = R.r$.

SOLUÇÃO

DO e EO são as respectivas bissetrizes de $A\hat{D}C$ e $B\hat{E}C$

$AD \,//\, BE \Rightarrow 2a + 2b = 180^o \Rightarrow$

$\Rightarrow a + b = 90^o \Rightarrow$ triângulo DOE é retângulo em O.



Como $OC \perp DE$, vem $(OC)^2 = (CD)\cdot(CE) \Rightarrow x^2 = R\cdot r$

Outro modo:

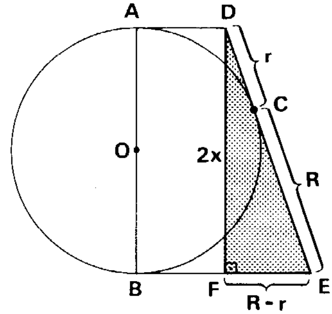
Pela tangência:

AD = r e BE = R e ainda temos que. FE = R - r

No triângulo retângulo DFE vem:

$(2x)^2 + (R - r)^2 = (R + r)^2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \; 4x^2 = 4\,Rr \Longrightarrow x^2 = R \cdot r$



R.11 Um ponto P dista PA = x de uma circunferência de centro O e raio R. PT é tangente à circunferência em T e TB = r é perpendicular a OP. Dados x, R e r calcular AB = h.

SOLUÇÃO

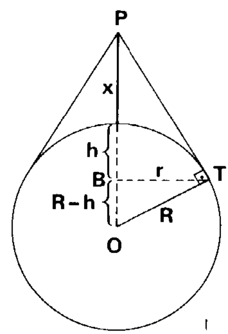
Do triângulo PTO retângulo em T vem:

$R^2 = (x + r)\;(R - h) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow R^2 = xR - xh + R^2 - Rh \Longrightarrow$

$\Longrightarrow xR - xh - Rh = 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow xR = h(x + R) \Longrightarrow \boxed{h = \dfrac{x + R}{xR}}$



R.12 Em um triângulo ABC pode ocorrer

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cm \quad \text{e} \quad c^2 = a^2 + b^2 + 2\,bm$$

onde $\underline{m}$ é a projeção de $\underline{b}$ sôbre $\underline{c}$ e $\underline{n}$ projeção de $\underline{a}$ sôbre $\underline{b}$?

RESPOSTA: Não. Se ocorressem as duas relações teríamos:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 + 2\text{ cm} \Longrightarrow \hat{A} > 90^\circ \\ c^2 = a^2 + b^2 + 2\text{ bn} \Longrightarrow \hat{C} > 90^\circ \end{array}\right\} \text{ o que é absurdo num } \Delta ABC.$$

R.13 Dado um triângulo de lados x = 5 cm, y = 7 cm e z = 8 cm, calcular a projeção de z sôbre x.

Sendo $\underline{m}$ a projeção de z sôbre x e notando que y não é o maior lado do triângulo, o ângulo oposto a y é agudo, então:

$$y^2 = z^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot m \Longrightarrow 7^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot m \Longrightarrow m = 4$$

RESPOSTA: 4 cm.

R.14 Reconhecer a natureza de um triângulo cujos lados são inversamente proporcionais a 3, 4 e 5.

$$a = \frac{1}{3} K = \frac{20}{60} K = 20\ k \Rightarrow a^2 = 400\ k^2$$

$$b = \frac{1}{4} K = \frac{15}{60} K = 15\ k \Rightarrow b^2 = 225\ k^2$$

$$c = \frac{1}{5} K = \frac{12}{60} K = 12\ k \Rightarrow c^2 = 144\ k^2$$

$$\frac{K}{60} = k \qquad\qquad b^2 + c^2 = 369\ k^2$$

Logo, $a^2 > b^2 + c^2 \Rightarrow$ o triângulo é obtusângulo.

R.15 Calcular o lado e o apótema do dodecágono regular inscrito numa circunferência de raio R.

a) Cálculo do ℓ_{12}

Substituindo na expressão do $\ell_{2n} = \sqrt{R(2R - \sqrt{4R^2 - \ell_n^2})}$, o ℓ_n por $\ell_6 = R$ vem:

$$\ell_{12}^2 = R\ (2R - \sqrt{4R^2 - R^2}\ ) \Rightarrow \ell_{12}^2 = R^2\ (2 - \sqrt{3}\ ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell_{12} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

b) Cálculo do a_{12}.

Substituindo $\ell_{12} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ na expressão geral do apótema $a_n = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - \ell_n^2}$ vem:

$$a_{12} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - \ell_{12}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - R^2(2 - \sqrt{3})} = \frac{R}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

R.16 Se o raio de uma circunferência aumenta de 1 m, de quanto aumenta o comprimento?

Sejam C_1 e C_2 os respectivos comprimentos, $r_1 = r$ e $r_2 = r + 1$ os respectivos raios temos:

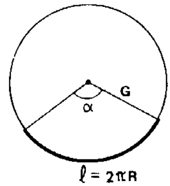
Aumento $= C_2 - C_1 = 2\pi\,(r + 1) - 2\pi r = 2\pi$

OBSERVAÇÃO: Note que isto vale para *qualquer* circunferência e que o aumento é aproximadamente 6,28 m.

R.17 Um arco de circunferência de comprimento $2\pi R$, de uma circunferência de raio G que ângulo central subentende?

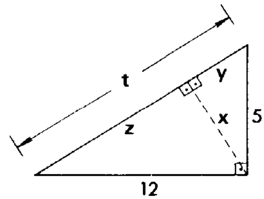
$\ell = 2\pi R \qquad \text{raio} = G$

$\alpha = \dfrac{2\pi R}{G}$ rad ou $\alpha = \dfrac{R}{G} \cdot 360^o$.

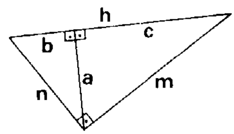


VI. PROBLEMAS PROPOSTOS.

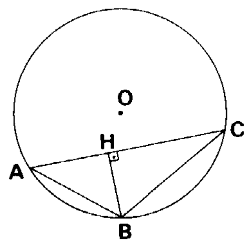
P.21 Na figura determinar os elementos x, y, z e t.



P.22 Escrever 10 relações métricas com os elementos indicados na figura.



P.23 Na figura, AB é igual ao raio do círculo de centro O. BC = 26 e BH é perpendicular a AC. Calcule HC.



P.24 Calcular o raio da circunferência circunscrita a um triângulo isósceles de base 6 cm tendo outro lado medindo 5 cm.

P.25 A altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo mede 12m. Se a hipotenusa mede 25m, calcular os catetos.

P.26 Um ponto P dista PA = x de uma circunferência de centro O e raio R. PT é tangente à circunferência em T, TB = r é perpendicular a OP e AB = h.

a) Dados x e h calcular R

b) Dados h e R calcular x.

P.27 Reconhecer a natureza de um triângulo:

a) cujos lados medem 6, 12 e 13.

b) cujos lados medem 6, 10 e 12.

c) cujos lados medem 5, 12 e 13.

d) cujos lados estão na razão: 3 : 4 : 4,5.

e) cujos lados são inversamente proporcionais a 3, 4 e 6.

P.28 Dado o raio R de uma circunferência, calcular o lado e o apótema do octógono regular inscrito.

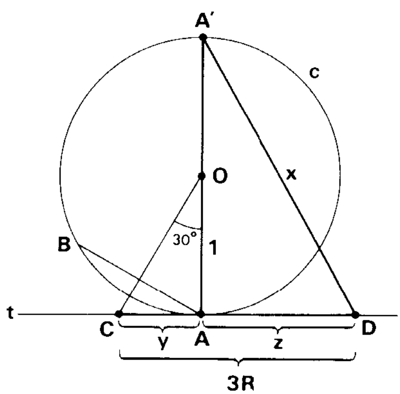
P.29 Usando a expressão do ℓ_{2n} e sabendo que o $\ell_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$, calcule o ℓ_5. A seguir calcule o a_5.

P.30 Dada uma circunferência de diâmetro d, calcular o comprimento de um arco cujo ângulo central correspondente é:

a) 30^o; b) 45^o; c) 60^o; d) 90^o;
e) 120^o; f) 135^o; g) 150^o.

P.31 Um arco de comprimento $2\pi R$ de uma circunferência de raio 2R, subentende um arco de quantos graus?

P.32 Sejam um círculo c de centro O, de raio R = 1, diâmetro AA' e a tangente t em A ao círculo c. AB sendo um lado do hexágono regular inscrito em c, amediatriz de AB corta a reta t em C. Construamos sôbre t o segmento CD = 3R. Mostrar que o comprimento A'D é um valor aproximado de π.



P.33 (EPUSP - 54) Sendo a, b, c, as medidas dos lados de um triângulo não retângulo e m a medida da mediana relativa ao lado c, demonstre que os números a^2, b^2, 2 cm são as medidas dos lados do outro triângulo.

VII. TESTES.

T.10 (FFCLUSP - 66) Um triângulo de lados 5 cm, 12 cm e 13 cm

a) é isósceles;
b) é retângulo;
c) não existe;
d) é mágico;
e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.11 (EPUSP - 66 - 1ª prova - "prévio") Os lados de um triângulo estão na razão 6 : 8 : 9. Então:

a) o triângulo é obtusângulo;
b) o triângulo é acutângulo;
c) os ângulos estão na razão. 6 : 8 : 9;
d) o ângulo oposto ao lado maior é o dôbro do ângulo oposto ao lado menor;
e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.12 (ITA - 68) Dado um triângulo de lados $a = 3$ cm, $b = 4$ cm e $c = 6$ cm a projeção do lado $\underline{a}$ sôbre o lado $\underline{c}$ é:

a) $2\frac{5}{13}$ cm;
b) $2\frac{7}{12}$ cm;
c) $\frac{29}{12}$ cm;
d) 0 ;
e) $2\frac{1}{2}$ cm .

T.13 (CESCEM - 71) $\underline{a}$ e $\underline{b}$ são números inteiros tais que $a > b > 0$ o triângulo de lados $a^2 + b^2$, $a^2 - b^2$ e $2ab$:

a) é sempre acutângulo;
b) é sempre retângulo;
c) é sempre obtusângulo;
d) pode ser acutângulo, retângulo ou obtusângulo, dependendo de $\frac{a}{2b}$;
e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.14 (EPUSP - 66) Num triângulo ABC, o ângulo A é obtuso. Os lados AB e AC medem 3 e 4, respectivamente. Então:

a) $BC < 4$;
b) $BC < 5$;
c) $BC > 7$;
d) $5 < BC < 7$;
e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.15 (EESCUSP - 68) Dado o triângulo ABC tal que $AC = 2$, $BC = \sqrt{3}$, $\hat{C} = \frac{\pi}{6}$, temos:

a) $AB = 3$;
b) $AB = \sqrt{3}$;
c) $AB = 2$;
d) $AB = \sqrt{2}$;
e) Nada disso.

T.16 (FFCLUSP - 67) Dados dois segmentos AC e BC e um ângulo $\hat{B}$, é possível construir-se um único triângulo que tenha lados AC e BC, quando:

a) $AC > BC$;
b) $\hat{B} < \frac{\pi}{2}$;
c) $AC < BC$;
d) $AC = \frac{1}{2} BC$;
e) Nenhuma das afirmações anteriores é verdadeira.

T.17 (ITA - 68) Existe o triângulo ABC tal que $a = 10$cm, $b = 4$cm, $\beta = 30^\circ$, onde β é o ângulo oposto ao lado b? Em caso afirmativo, o lado c vale:

a) 8 cm;
b) 7 cm;
c) 9 cm;
d) 11 cm;
e) não existe tal triângulo.

T.18 Quando o comprimento de uma circunferência aumenta de 10 m para 15 m, o raio aumenta de:

a) $\frac{5}{2\pi}$ m ;
b) 2,5 m ;
c) 5 m ;
d) $\frac{\pi}{5}$ m ;
e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.19 (FEIUC - 66) Dando-se um acréscimo Δr ao raio da terra, o equador aumentaria 1 m. Tem-se então:

a) $\Delta r < 1$ mm ;
b) 10 cm $< \Delta r < 20$ cm ;
c) $\Delta r > 1$ m ;
d) $\Delta r = 1$ cm ;
e) Nenhuma das anteriores.

T.20 (CICE - 68) Seja $\underline{p}$ o perímetro de um polígono regular de $\underline{n}$ lados inscrito em uma circunferência de raio $\underline{r}$. Assinale qual das seguintes relações é verdadeira:

a) $p = 2n\sqrt{2}\, r$;
b) $p = (n+1)\sqrt{5}\, r$;
c) $p < 7r$
d) $p > 8r$;
e) $p = \frac{n^2}{2}\sqrt{3}\, r$

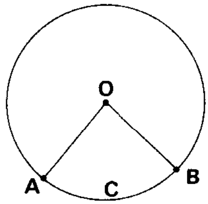
T.21 Se o raio de um círculo aumenta de 50%, o comprimento da circunferência aumenta de:

a) 25 % ;
b) 50 % ;
c) 100 %;
d) 125 % ;
e) 250 % .

T.22 Um arco de 2 cm de comprimento de uma circunferência de 1 cm de raio subentende um ângulo de:

a) 2 rad ;
b) π rad ;
c) $\frac{\pi}{2}$ rad ;
d) $\frac{\pi}{360}$ graus
e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.23 Na figura, o círculo de centro O tem raio 12 e o ângulo AOB = 30°. O comprimento do arco ACB é:



a) 4π
b) $\frac{13}{2}$
c) 6
d) 2π
e) $\frac{25}{2}$

T.24 (ITA - 68) Todo polígono convexo inscrito numa circunferência de raio R tem:

a) o perímetro igual a πR^2;
b) o perímetro menor que πR;
c) o perímetro menor que 8R;
d) o perímetro igual a 6R;
e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.25 (ITA - 68) Dado um número real $m > 0$, existem um polígono regular circunscrito e um polígono regular inscrito numa mesma circunferência, tais que a diferença entre seus perímetros é menor do que m. A afirmação é verdadeira quando:

a) $m > 0$ e arbitrário;
b) $m > 1$;
c) m depende do raio da circunferência ;
d) necessàriamente $m > 0$ e arbitràriamente pequeno ;
e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.26 (CICE - 70) Dois lados consecutivos de um paralelogramo têm por medidas a e b e uma das diagonais tem por medida c. Então a medida da outra diagonal é:

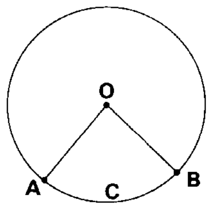
T.21 Se o raio de um círculo aumenta de 50%, o comprimento da circunferência aumenta de:

a) 25 % ;
b) 50 % ;
c) 100 %;
d) 125 % ;
e) 250 % .

T.22 Um arco de 2 cm de comprimento de uma circunferência de 1 cm de raio subentende um ângulo de:

a) 2 rad ;
b) π rad ;
c) $\frac{\pi}{2}$ rad ;
d) $\frac{\pi}{360}$ graus
e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.23 Na figura, o círculo de centro O tem raio 12 e o ângulo AOB = 30º. O comprimento do arco ACB é:



a) 4π
b) $\frac{13}{2}$
c) 6
d) 2π
e) $\frac{25}{2}$

T.24 (ITA - 68) Todo polígono convexo inscrito numa circunferência de raio R tem:

a) o perímetro igual a πR^2;
b) o perímetro menor que πR;
c) o perímetro menor que 8R;
d) o perímetro igual a 6R;
e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.25 (ITA - 68) Dado um número real $m > 0$, existem um polígono regular circunscrito e um polígono regular inscrito numa mesma circunferência, tais que a diferença entre seus perímetros é menor do que m. A afirmação é verdadeira quando:

a) $m > 0$ e arbitrário;
b) $m > 1$;
c) m depende do raio da circunferência ;
d) necessàriamente $m > 0$ e arbitràriamente pequeno ;
e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.26 (CICE - 70) Dois lados consecutivos de um paralelogramo têm por medidas $\underline{a}$ e $\underline{b}$ e uma das diagonais tem por medida $\underline{c}$. Então a medida da outra diagonal é:

a) $\sqrt{3\ (a^2 + b^2) - 2\ c^2}$;

b) $\sqrt{2\ (a^2 + b^2) - c^2}$;

c) $\sqrt{4\ (a^2 + b^2) - 3\ c^2}$;

d) $\sqrt{2ab - c^2}$;

e) nada disso.

T.27 (CICE - 70) Considere a figura que consiste em um segmento AB de comprimento a e em dois arcos circulares AC e BC de raio a e centros respectivamente em B e A. O raio do círculo inscrito nessa figura, tangente ao segmento AB e aos arcos AC e BC, é:

a) $(\sqrt{2} - 1)a$;

b) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ a ;

c) $\frac{3a}{8}$;

d) $\frac{2a}{5}$;

e) Nenhum dêstes .

CAPÍTULO III

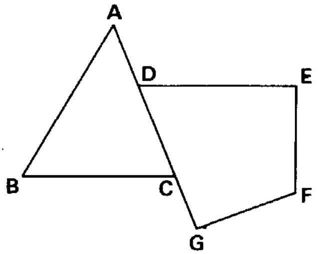
ÁREAS DE SUPERFÍCIES PLANAS

I. EQUIVALÊNCIA PLANA.

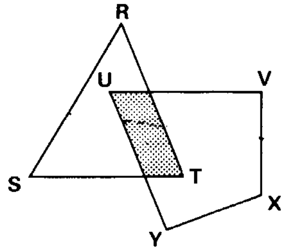
I - A. DEFINIÇÕES.

35• POLÍGONOS CONTÍGUOS OU ADJACENTES

Dois polígonos são chamados contíguos ou adjacentes quando têm em comum sòmente pontos de seus contôrnos.



ABC e DEFG são contíguos.

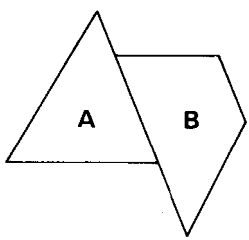


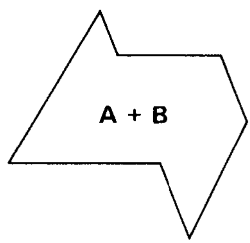
RST e UVXY não são contíguos.

36• SOMA DE POLÍGONOS

1. Soma de polígonos contíguos

Chama-se soma de dois polígonos contíguos a superfície constituída pelos pontos comuns e os não comuns aos dois polígonos.



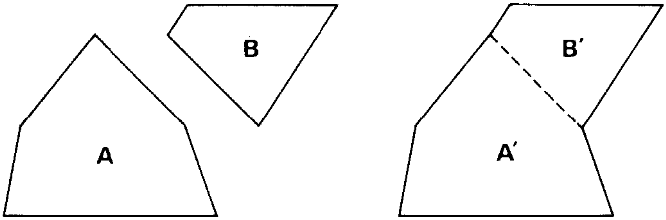


Temos então: A e B contíguos

$x \in (A+B) \iff (x \in A$ ou $x \in B)$ ou ainda $A + B = A \cup B$

2. Soma de dois polígonos quaisquer

Soma de dois polígonos quaisquer, A e B, é definida como sendo a soma dos polígonos contíguos A' e B' em que A' é congruente a A e B' é congruente a B.



$(A+B) = (A'+B')$

37• EQUIVALÊNCIA ENTRE POLÍGONOS

Dois polígonos são chamados equivalentes ou equicompostos, se e sòmente se, forem somas de *igual número* de polígonos *dois a dois congruentes* entre si.

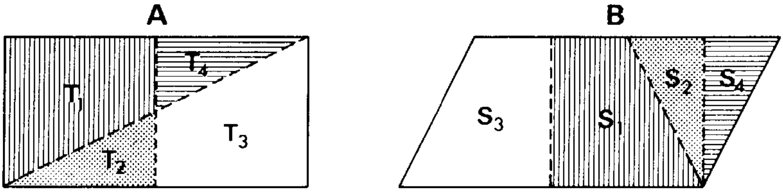
Em símbolos: $$\left(T_i \equiv S_i,\quad A = \sum_{i=1}^{n} T_i,\quad B = \sum_{i=1}^{n} S_i \right) \iff A \approx B$$

Notemos que A e B são somas de n polígonos e que cada polígono-parcela T_i de A é congruente a um polígono-parcela S_i de B e reciprocamente.

Símbolos usados: $\equiv$ para congruência

$\approx$ para equivalência

EXEMPLO:



$$\left(\begin{array}{c} T_1 \equiv S_1,\ T_2 \equiv S_2,\ T_3 \equiv S_3,\ T_4 \equiv S_4 \\ A = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \\ B = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \end{array} \right) \Rightarrow A \approx B$$

I-B. PROPRIEDADES FORMAIS.

P.E. 1 *Reflexiva:* $A \approx A$

P.E. 2 *Simétrica:* $A \approx B \iff B \approx A$

P.E. 3 *Transitiva:* $\left.\begin{array}{l} A \approx B \\ B \approx C \end{array}\right\} \Rightarrow A \approx C$

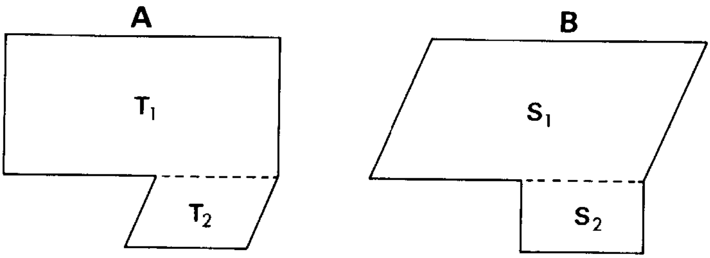
P.E. 4 *Uniforme:*

"Somas de polígonos dois a dois equivalentes entre si, são superfícies equivalentes entre si."

Em símbolos:

$$\left(T_i \approx S_i,\quad A = \sum_i^n T_i,\quad B = \sum_i^n S_i \right) \Rightarrow A \approx B$$

EXEMPLOS:

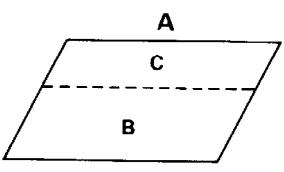


$$\left(\begin{array}{c} T_1 \approx S_1, \quad T_2 \approx S_2 \\ A = T_1 + T_2 \\ B = S_1 + S_2 \end{array} \right) \Rightarrow A \approx B$$

P.E. 5 *Disjuntiva - Postulado de De Zolt.*

"Um polígono, que é soma de dois ou mais outros, não é equivalente a uma das parcelas."

EXEMPLO:



$A = B + C \Rightarrow A \neq B \wedge A \neq C$

38• NOTAS

1ª) As propriedades PE-1, PE-2, PE-3 e PE-4 são de demonstrações imediatas em vista da definição de equivalência.

2ª) A propriedade PE-5 não tem demonstração (é postulado) e pode ser colocada como segue:

Dados dois polígonos P e Q quaisquer, de três possibilidades ocorre uma (e uma só):

ou, P é equivalente a Q: $P \approx Q$;

ou, Q é equivalente a uma parte de P:

$$P = P_1 + P_2 \quad \text{e} \quad P_1 \approx Q$$

ou, P é equivalente a uma parte de Q:

$$Q \approx Q_1 + Q_2 \quad \text{e} \quad Q_1 \approx P$$

I-C. REDUÇÃO DE POLÍGONOS POR EQUIVALÊNCIA.

39• TEOREMA

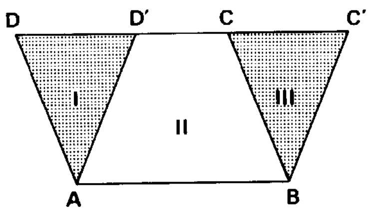
"Dois paralelogramos de bases e alturas respectivamente congruentes, são equivalentes".

DEMONSTRAÇÃO

Sem perda de generalidade, consideremos os paralelogramos ABCD e ABC'D' com base AB e com alturas congruentes.

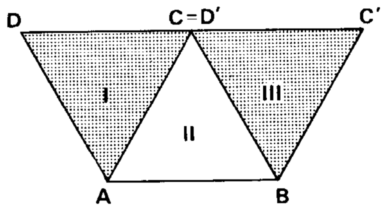
Podem apresentar-se três casos:

<u>1º caso</u>: CD e C'D' têm um segmento comum.



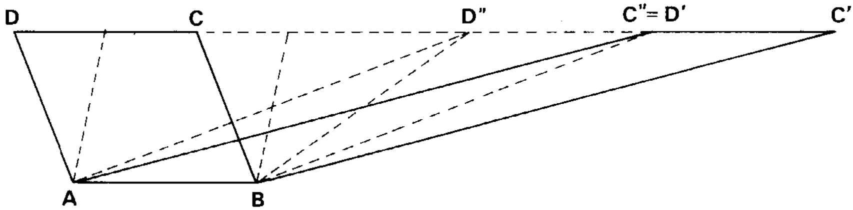
$$\dfrac{\left.\begin{array}{r} I \equiv III \\ II \equiv II \end{array}\right\} +}{\underset{ABCD}{\underset{\downarrow}{(I + II)}} \approx \underset{ABC'D'}{\underset{\downarrow}{(II + III)}}}$$

<u>2º caso</u>: CD e C'D' tem só um ponto comum.



$$\dfrac{\left.\begin{array}{r} I \equiv III \\ II \equiv II \end{array}\right\} +}{\underset{ABCD}{\underset{\downarrow}{(I + II)}} \approx \underset{ABC'D'}{\underset{\downarrow}{(II + III)}}}$$

3º caso: CD e C'D' não têm ponto comum.

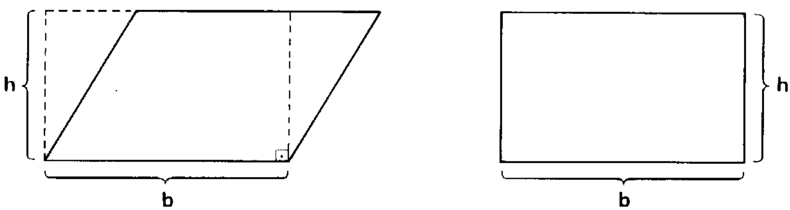


Por aplicação dos casos anteriores, da propriedade transitiva e do Postulado de Archimedes(*) temos:

$ABC'D' \approx ABC''D'' \approx \ \ldots \ \approx ABCD \Rightarrow ABCD \approx ABC'D'$

40• NOTA

Devido ao teorema acima, temos em particular que:
"Todo paralelogramo é equivalente a um retângulo de base e altura respectivamente congruentes às do paralelogramo".

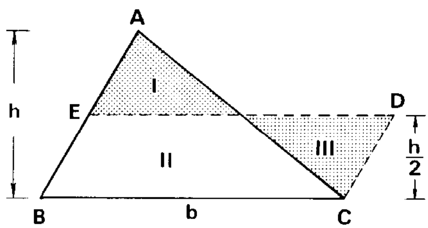


41• TEOREMA

"Todo triângulo é equivalente a um paralelogramo de base congruente à do triângulo e altura metade da altura do triângulo".

DEMONSTRAÇÃO

Pelo ponto médio E de AB conduzimos ED paralela a BC e completamos o paralelogramo BCDE.



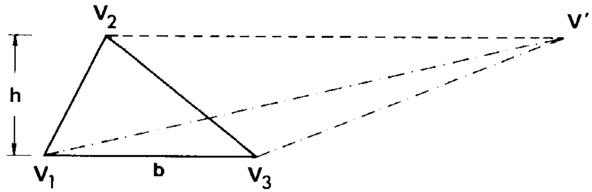
$$\frac{\left.\begin{array}{l} I \equiv III \\ II \equiv II \end{array}\right\} +}{(I + II) \approx (II + III) \Rightarrow ABC \approx BCDE}$$

(*) Postulado de Archimedes: "Dados dois segmentos, existe sempre um múltiplo de um dêles (menor) que supera o outro (maior)".

42• NOTA

Em vista do resultado acima e do anterior temos em particular que: "Dois triângulos de bases e alturas ordenadamente congruentes são equivalentes".

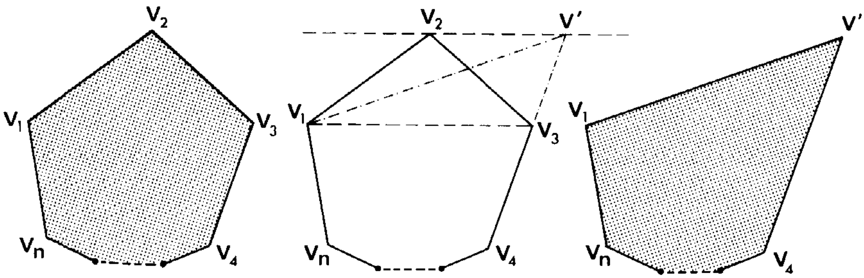
$\Delta V_1V_2V_3 \approx \Delta V_1V'V_3$



43• TEOREMA

"Dado um polígono convexo com $\underline{n}$ lados $(n > 3)$, existe um polígono convexo com $(n-1)$ lados que lhe é equivalente.

Seja dado o polígono $Pol(V_1V_2V_3V_4 \ldots V_n)$ e seja V' a intersecção da reta V_3V_4 com a reta paralela a V_1V_3 por V_2.



$$\left.\begin{aligned} Pol(V_1V_2V_3V_4 \ldots V_n) &= \Delta V_1V_2V_3 + Pol(V_1V_3V_4 \ldots V_n) \\ Pol(V_1V'V_4 \ldots V_n) &= \Delta V_1V'V_3 + Pol(V_1V_3V_4 \ldots V_n) \end{aligned}\right\} \; P.E. - 4 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \underbrace{Pol\,(V_1V_2V_3V_4 \ldots V_n)}_{n \text{ lados}} \approx \underbrace{Pol\,(V_1V'V_4 \ldots V_n)}_{(n-1) \text{ lados}}$$

44• NOTA

Em vista dos três ítens 39, 41 e 43, podemos reduzir por equivalência um *POLÍGONO* de $\underline{n}$ lados $(n > 3)$ a um *TRIÂNGULO* equivalente, êste a um *PARALELOGRAMO* equivalente e êste a um *RETÂNGULO* equivalente. Então, vale:

"Todo polígono é equivalente a um retângulo".

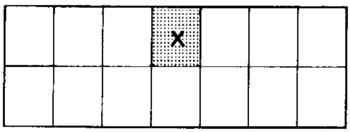
II. ÁREAS DE POLÍGONOS.

II - A. INTRODUÇÃO.

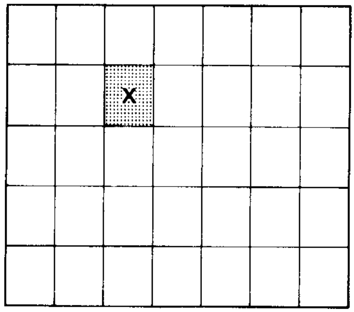
Os *retângulos* formam uma *classe* de figuras para as quais se pode definir *equivalência, adição* e *desigualdade.*

Por isso podemos definir *razão* entre retângulos do mesmo modo que se define *razão entre segmentos.*

Por exemplo sejam R_1 e R_2 os retângulos abaixo:



$R_1 = 14X$



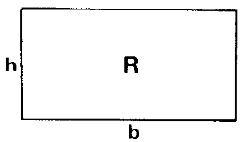
$R_2 = 35X$

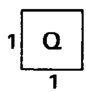
Por definição, $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{14\ X}{35\ X} = \dfrac{14}{35}$

Nestas condições, fixando-se um *retângulo unitário,* podemos definir:

45• ÁREA DO RETÂNGULO (medida do retângulo)

É a razão entre o retângulo e o retângulo unitário (quadrado unitário).





$$A_R = \frac{R_{(b,h)}}{Q_{(1,1)}}$$

46• ÁREA DO POLÍGONO (ou de uma superfície poligonal)

É a área do retângulo a êle equivalente.

Posteriormente, baseando-se em áreas dos polígonos, pode-se definir área do círculo, "elipse", segmento parabólico, etc.

II - B. ÁREA DE UMA SUPERFÍCIE LIMITADA.

47• DEFINIÇÃO

Área de uma superfície limitada é *um número* real positivo associado à superfície de forma tal que:

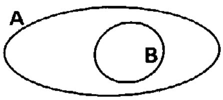
1º) A superfícies equivalentes estão associadas áreas iguais (números iguais) e reciprocamente.

$A \approx B \iff$ (Área de A = Área de B)

2º) A uma soma de superfícies está associada uma área (número) que é a soma das áreas das superfícies parcelas.

$(C = A + B) \implies$ (área de C = Área de A + Área de B)

3º) Se uma superfície *está contida* (propriamente) em outra, então, sua área é *menor* que a área da outra.



$B \subset A \implies$ Área de $B \leqslant$ Área de A

II - C. RAZÃO ENTRE RETÂNGULOS.

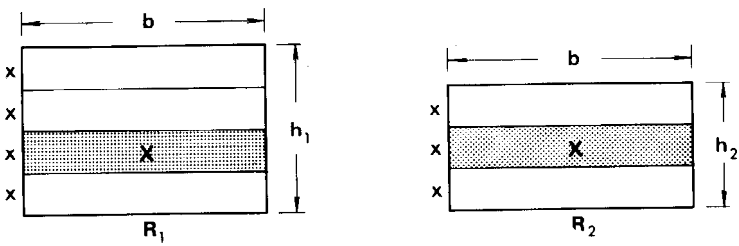
48• TEOREMA

"A razão entre dois retângulos de bases congruentes (ou alturas congruentes) é igual à razão entre suas alturas (ou bases)".

$$H \begin{cases} R_1 & (b,\ h_1) \\ R_2 & (b,\ h_2) \end{cases} \qquad T \left\{ \frac{R_1}{R_2} = \frac{h_1}{h_2} \right.$$

DEMONSTRAÇÃO

1º caso: h_1 e h_2 são *comensuráveis*



Então, existe um submúltiplo de h_1 e de h_2.

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= px \\ h_2 &= qx \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{p}{q} \qquad (1)$$

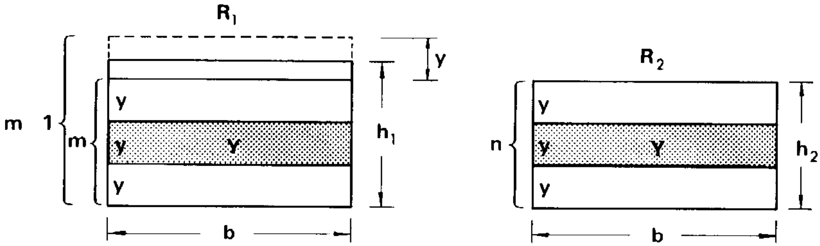
Construindo os retângulos $X(b, x)$, temos:

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= pX \\ R_2 &= qX \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{p}{q} \qquad (2)$$

De (1) e (2), vem:

$$\boxed{\frac{R_1}{R_2} = \frac{h_1}{h_2}}$$

2º caso: h_1 e h_2 são *incomensuráveis*



Então, não existe segmento submúltiplo comum de h_1 e h_2.
Tomemos um segmento $\underline{y}$ submúltiplo de h_2 (y "cabe" um certo número inteiro $\underline{n}$ de vêzes em h_2, isto é, $h_2 = ny$).

Por serem h_1 e h_2 incomensuráveis, marcando sucessivamente y em h_1, temos que, chegando um certo número inteiro $\underline{m}$ de vêzes, acontece que:

$$my < h_1 < (m+1)y$$

Operando com as relações acima vem:

$$\left.\begin{aligned} my &< h_1 < (m+1)y \\ ny &= h_2 = ny \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boxed{\frac{m}{n} < \frac{h_1}{h_2} < \frac{m+1}{n}} \qquad (3)$$

Construindo os retângulos $Y(b, y)$, temos:

$$\left.\begin{aligned} mY &< R_1 < (m+1)Y \\ nY &= R_2 = nY \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{m}{n} < \frac{R_1}{R_2} < \frac{m+1}{n} \qquad (4)$$

Ora, sendo y submúltiplo de h_2, pode variar e dividindo y, aumentamos n e nestas condições,

$$\frac{m}{n} \quad e \quad \frac{m+1}{n}$$

formam um *par de classes contíguas* que definem *um único* número real, que é

$$\frac{h_1}{h_2} \text{ pela expressão (3) e é } \frac{R_1}{R_2} \text{ pela expressão (4).}$$

Como êsse número é *único*, então,

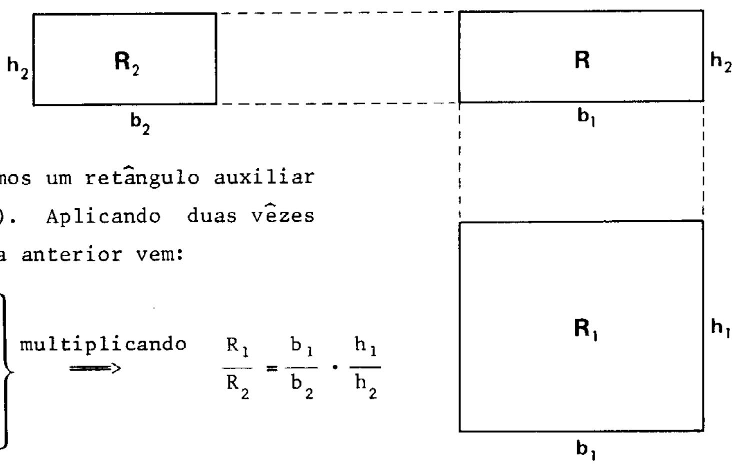
$$\boxed{\frac{R_1}{R_2} = \frac{h_1}{h_2}}$$

49• TEOREMA

"A razão entre dois retângulos quaisquer é igual ao produto da razão entre as bases pela razão entre as alturas".

Hipótese		Tese
$R_1(b_1, h_1)$ $R_2(b_2, h_2)$	$\Rightarrow$	$\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \cdot \dfrac{h_1}{h_2}$

DEMONSTRAÇÃO



Construamos um retângulo auxiliar $R(b_1, h_2)$. Aplicando duas vêzes o teorema anterior vem:

$$\left.\begin{aligned} \frac{R_1}{R} &= \frac{h_1}{h_2} \\ \frac{R}{R_2} &= \frac{b_1}{b_2} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{multiplicando}} \frac{R_1}{R_2} = \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{h_1}{h_2}$$

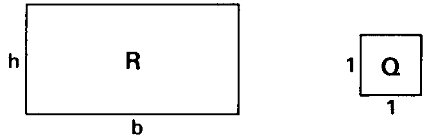
II - D. DEDUÇÃO DAS FÓRMULAS DE ÁREA

50• RETÂNGULO

Dado o retângulo R(b, h) e fixado o quadrado Q(1, 1) como unitário temos:

Área do retângulo R(b, h) =

$$= A_R = \frac{R(b,\ h)}{Q(1,\ 1)}$$



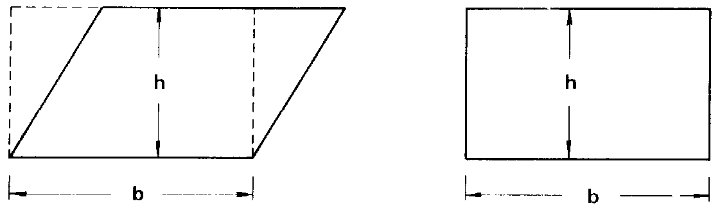
Em vista do item 45 vem

$$A_R = \frac{R(b,\ h)}{Q(1,\ 1)} = \frac{b}{1} \cdot \frac{h}{1} \implies A_R = (\text{medida de } b) \cdot (\text{medida de } h)$$

que será representada simplesmente por $\boxed{A_R = b \cdot h}$

51• PARALELOGRAMO

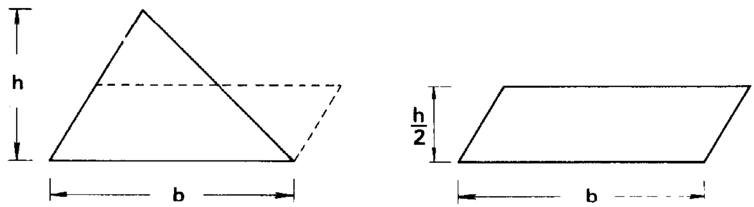
Dado o paralelogramo P(b, h), conforme vimos no ítem 40, êle é equivalente a um retângulo cuja base mede b e altura mede h, logo:



$$A_P = A_R \implies \boxed{A_P = b \cdot h}$$

52• TRIÂNGULO

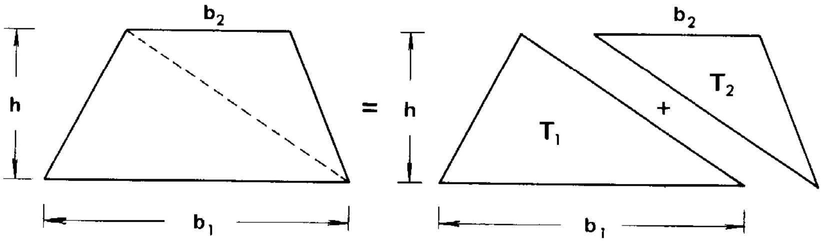
Dado o triângulo T(b,h), conforme vimos no ítem 41, êle é equivalente a um paralelogramo cuja base mede b e altura mede $\frac{h}{2}$, logo:



$$A_T = A_{\text{paralelogramo}} \qquad A_T = b \cdot \frac{h}{2} \implies \boxed{A_T = \frac{b \cdot h}{2}}$$

53• TRAPÉZIO

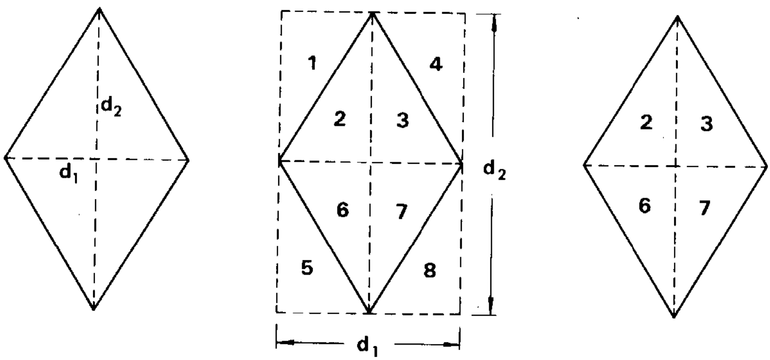
Dado o trapézio T_{ra} (b_1, b_2, h), êle é a soma de dois triângulos $T_1(b_1, h)$ e $T_2(b_2, h)$



$$A_{T_{ra}} = \frac{b_1 \cdot h}{2} + \frac{b_2 \cdot h}{2} \Longrightarrow \boxed{A_{Tra} = \frac{(b_1 + b_2) \cdot h}{2}}$$

54• LOSANGO

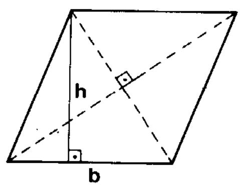
Dado o losango $L(d_1, d_2)$, conduzimos as diagonais e, pelos vértices, as paralelas às diagonais.



$$A_L = A_{(4\ \text{triângulos})} = \frac{A_{(8\ \text{triângulos})}}{2} \Longrightarrow \boxed{A_L = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}}$$

NOTA: O losango é paralelogramo e portanto sua área também é dada por

$$\boxed{A_L = b \cdot h}$$



55• POLÍGONO REGULAR

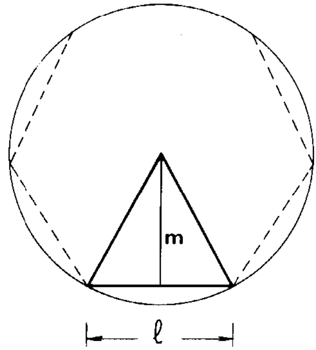
Sendo:

n = número de lados

m = medida do apótema

ℓ = medida do lado

p = semi-perímetro



Seja um polígono regular de $\underline{n}$ lados de medidas iguais a ℓ e de apótema de medida $\underline{m}$.

Podemos decompor êsse polígono em $\underline{n}$ triângulos de base ℓ e altura $\underline{m}$.

Então:

$$\left.\begin{aligned} A_T &= \frac{\ell \cdot m}{2} \\ A_{pol} &= n \cdot A_T \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad A_{pol} = \frac{\overbrace{n \cdot \ell}^{2p} \cdot m}{2}$$

Sendo $n \cdot \ell = 2p$ (perímetro), vem:

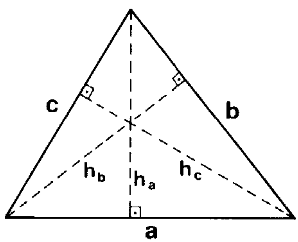
$$A_{pol} = \frac{2 \cdot p \cdot m}{2} \Longrightarrow \boxed{A_{pol} = p \cdot m}$$

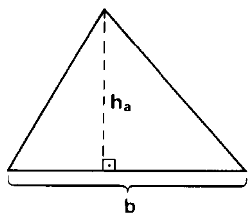
III. EXPRESSÕES DA ÁREA DO TRIÂNGULO.

56• Em função dos lados e respectivas alturas:

Em vista do item 52

$$S = \frac{1}{2}\, a h_a, \quad S = \frac{1}{2}\, b h_b, \quad S = \frac{1}{2}\, c h_c$$





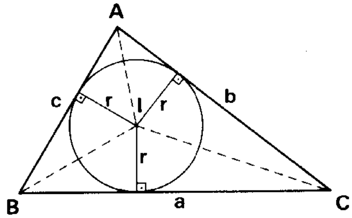
57• Área do triângulo em função dos lados.

Dados: a, b, c e com $p = \frac{a + b + c}{2}$

em vista do item 25 temos:

$$\left.\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\, a\, h_a \\ h_a &= \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)\ (p-b)\ (p-c)} \end{aligned}\right. \Longrightarrow \boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

58• Área do triângulo em função dos lados e do raio da inscrita $\underline{r}$.

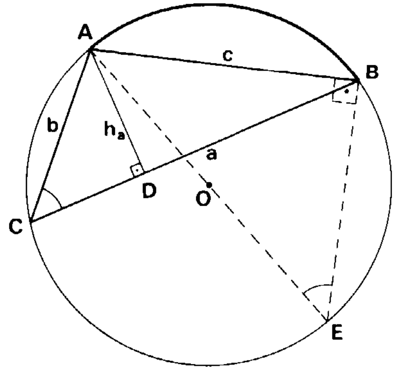


$$S = S_{ABC} = S_{IBC} + S_{IAC} + S_{IAB} =$$

$$= \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{a+b+c}{2}\, r \implies$$

$$\implies \boxed{S = p\,r}$$

59• Área do triângulo em função dos lados e do raio da circunferência R.



$$S = S_{ABC} = \frac{1}{2}\, a\, h_a \quad (1)$$

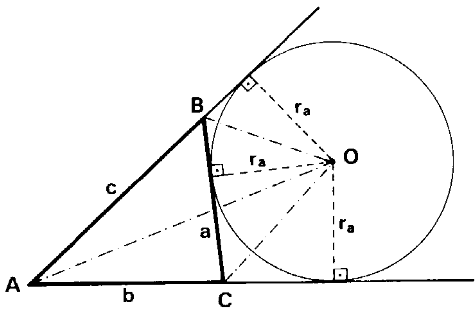
Para o cálculo de h_a (dados R, a, b e c), construimos o ΔABE com AE = 2R.

$$\left.\begin{array}{l} \hat{D} = \hat{B} \text{ (reto)} \\ \hat{C} = \hat{E} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2} \end{array}\right\} \implies \Delta ADC \sim \Delta ABE \implies$$

$$\implies \frac{h_a}{c} = \frac{b}{2R} \implies h_a = \frac{bc}{2R}$$ Substituindo em (1) vem: $$\boxed{S = \frac{a\,b\,c}{4R}}$$

60• Área do triângulo em função do raio de qualquer das circunferências ex-inscritas. (Por exemplo: ex-inscrita tangente ao lado $\underline{a}$, de raio r_a).

$$\left.\begin{array}{l} S_{ABOC} = \overset{S}{S_{ABC}} + \overset{\frac{1}{2} a\, r_a}{S_{OBC}} \\ S_{ABOC} = \underset{\frac{1}{2} b\, r_a}{S_{OAC}} + \underset{\frac{1}{2} c\, r_a}{S_{OAB}} \end{array}\right\} \implies$$



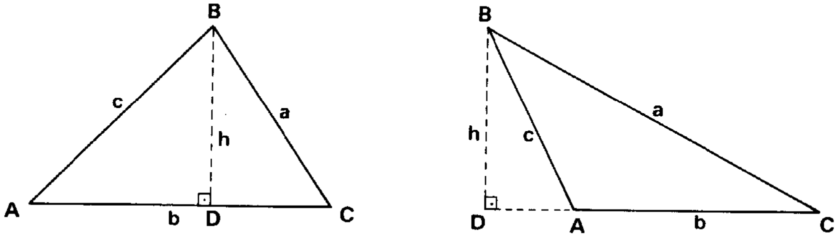
$$\implies S + \frac{1}{2}\, a\, r_a =$$

$$= \frac{1}{2}\, b\, r_a + \frac{1}{2}\, c\, r_a \implies S = \frac{1}{2}\underbrace{(-a+b+c)}\, r_a = \frac{1}{2}\, 2\underbrace{(p-a)}\, r_a \implies$$

$$\boxed{S = (p-a)\, r_a}$$

Anàlogamente temos: $\boxed{S = (p-b)r_b}$ $\boxed{S = (p-c)r_c}$

61• Área do triângulo em função de dois lados e do seno do ângulo compreendido.



No caso da primeira figura: $S = \frac{1}{2}bh$
mas no ΔADB: $h = c \text{ sen } A$ $\Rightarrow$ $S = \frac{1}{2}bc \cdot \text{sen } A$

No caso da segunda figura: $S = \frac{1}{2}bh$
mas no ΔADB: $h = c \text{ sen}(180^o - A) = c \text{ sen } A$ $\Rightarrow$ $S = \frac{1}{2}bc \cdot \text{sen } A$

No caso do triângulo ser retângulo em A é imediato.
Assim temos:

$$\boxed{S = \frac{1}{2} bc \cdot \text{sen } A}$$

Anàlogamente: $\boxed{S = \frac{1}{2} ac \cdot \text{sen } B}$ $\boxed{S = \frac{1}{2} ab \cdot \text{sen } C}$

62• RESUMO DAS FÓRMULAS SÔBRE ÁREA DO TRIÂNGULO

$$\boxed{\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} a\, h_a = \frac{1}{2} b\, h_b = \frac{1}{2} c\, h_c = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \\ &= pr = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c = \\ &= \frac{1}{2} ab \cdot \text{sen } C = \frac{1}{2} ac \cdot \text{sen } B = \frac{1}{2} bc \cdot \text{sen } A \end{aligned}}$$

IV. CÍRCULO E SUAS PARTES.

63• Vimos no ítem 55 que a área de um polígono regular

$$A_{pol} = p \quad m$$

é o produto da medida do semi-perímetro pela do apótema.

Tendo em vista os ítens, 29, 30, 31 e 32 do Capítulo II, vêm as afirmações abaixo:

Fixado um círculo, de raio R, diâmetro D, considerando os polígonos regulares inscritos e os circunscritos nesse círculo, com o crescimento do número de lados as áreas dos polígonos se aproximam da área do círculo, assim como os seus perímetros se aproximam do perímetro do círculo (vide comprimento da circunferência) e os apótemas se aproximam do raio do círculo. Podemos, então colocar, por extensão que:

A área do círculo é o produto de seu semi-perímetro pelo raio.

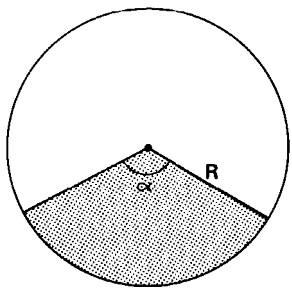
$$A_C = \pi R \cdot R = \pi R^2$$

Então:

$$\boxed{A_C = \pi R^2} \quad \text{ou} \quad \boxed{A_C = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{\pi D^2}{4}}$$

64• ÁREA DO SETOR CIRCULAR

a) Área de um setor circular de raio R e α radianos



$$\left.\begin{array}{l} 2\pi \text{ rad} — \pi R^2 \\ \alpha \text{ rad} — A_{setor} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

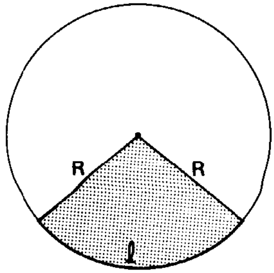
$$\boxed{A_{setor} = \frac{\alpha R^2}{2}}$$

b) Área de um setor circular de raio R e α graus

$$\left.\begin{array}{l} 360^{o} — \pi R^2 \\ \alpha^{0} — A_{setor} \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{A_{setor} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}}$$

c) Área de um setor circular em função de $\underline{R}$ e do comprimento ℓ do arco.

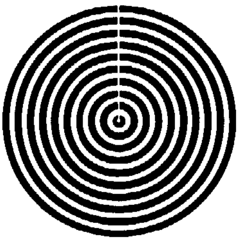
$$\left.\begin{array}{l} 2\pi R \;\text{———}\; \pi R^2 \\ \ell \;\text{———}\; A_{setor} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$



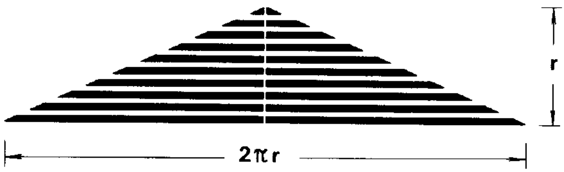
$$\Longrightarrow \boxed{A_{setor} = \frac{\ell R}{2}}$$

OBSERVAÇÃO: Note que tanto a área do setor, como a do círculo são análogas à área do triângulo e as figuras abaixo dão idéia disso,

Círculo

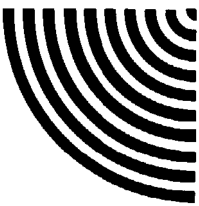


Triângulo equivalente



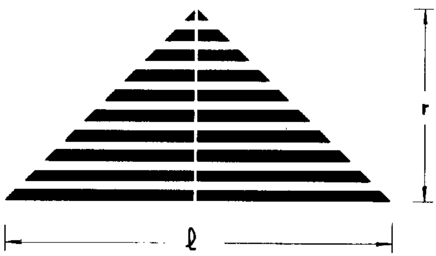
$$A_{círculo} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r \Rightarrow A_{círculo} = \pi r^2$$

Setor



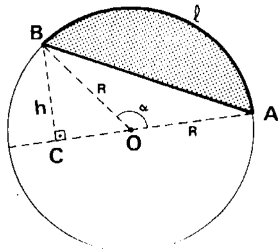
$$A_{setor} = \frac{1}{2}\,\ell r$$

Triângulo equivalente



65• ÁREA DO SEGMENTO CIRCULAR

Cálculo da área do segmento circular indicado na figura: R é o raio, α é a medida do ângulo central e ℓ é o comprimento do arco.



$A_{segm} = A_{set\ OAB} - A_{\Delta OAB}$

a) Usando o h

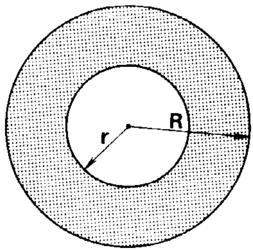
(que pode ser obtido no ΔOBC)

$$A_{segm} = \frac{\ell R}{2} - \frac{Rh}{2} \implies \boxed{A_{segm} = (\ell - h)\,\frac{R}{2}}$$

b) Usando α em radianos

$$A_{segm} = \frac{\alpha R^2}{2} - \frac{1}{2} R \cdot R \text{ sen } \alpha = \boxed{A_{segm} = \frac{R^2}{2}\,(\alpha - \text{sen } \alpha)}$$

66• ÁREA DA COROA CIRCULAR

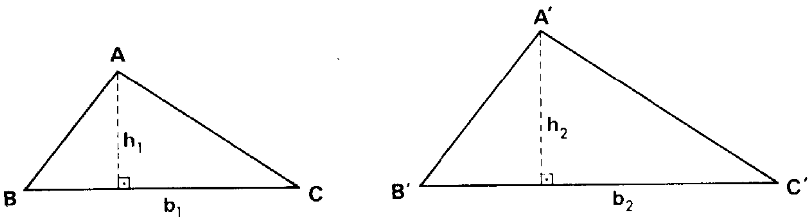


$A_{coroa} = \pi R^2 = \pi r^2 \implies$

$$= \boxed{A_{coroa} = \pi\,(R^2 - r^2)}$$

V. RAZÃO ENTRE ÁREAS.

67• RAZÃO ENTRE ÁREAS DE DOIS TRIÂNGULOS SEMELHANTES



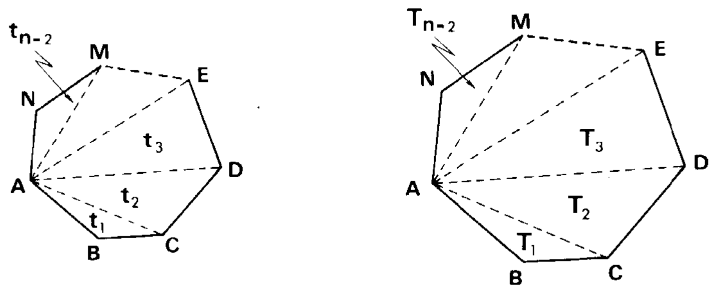
Área do triângulo ABC = S_1 Área do triângulo A'B'C' = S_2

$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \implies \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{h_1}{h_2} = k$ (razão de semelhança)

$$\frac{S_1}{S} = \frac{\frac{1}{2} b_1 h_1}{\frac{1}{2} b_2 h_2} = \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{h_1}{h_2} = k \cdot k = k^2 \Longrightarrow \frac{S_1}{S_2} = k^2$$

CONCLUSÃO: A razão entre as *áreas* de dois triângulos semelhantes é igual ao *quadrado* da razão de semelhança.

68• RAZÃO ENTRE ÁREAS DE DOIS POLÍGONOS SEMELHANTES.



Área de ABCDE ... MN = S_1 Área de A'B'C'D'E' ... M'N' = S_2

ABCDE...MN $\sim$ A'B'C'D'E'...M'N' $\Longrightarrow$ $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \wedge \Delta ACD \sim \Delta A'C'D' \wedge$

$\wedge \ldots \wedge \ \Delta AMN \sim \Delta A'M'N' \Longrightarrow \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \ldots = \dfrac{MN}{M'N'} = k$ razão de semelhança

Fazendo: Área $\Delta ABC = t_1$, Área $\Delta ACD = t_2$, ... , Área $\Delta AMN = t_{n-2}$

Área $\Delta A'B'C' = T_1$, Área $\Delta A'C'D' = T_2$, ... , Área $\Delta A'M'N' = T_{n-2}$

Foi provado no item 67 que:

$$\frac{t_i}{T_i} = k^2 \Longrightarrow t_i = k^2 T_i \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \ldots, n-2$$

Então, $$\frac{S_1}{S_2} = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_{n-2}}{T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_{n-2}} =$$

$$= \frac{k^2 T_1 + k^2 T_2 + k^2 T_3 + \ldots + k^2 T_{n-2}}{T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_{n-2}} \Longrightarrow \frac{S_1}{S_2} = k^2$$

CONCLUSÃO: A razão entre as *áreas* de dois polígonos semelhantes é igual ao *quadrado* da razão de semelhança.

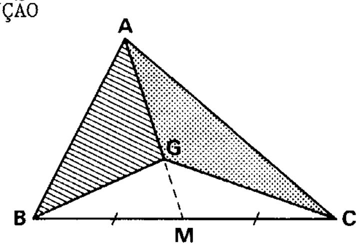
OBSERVAÇÃO: A propriedade acima é extensiva a quaisquer superfícies semelhantes e, por isso, vale:

A razão entre as *áreas* de duas *superfícies* semelhantes é igual ao *quadrado* da razão de semelhança.

VI. PROBLEMAS RESOLVIDOS.

R.18 Se G é o baricentro de um triângulo ABC, então os triângulos GAB, GAC e GBC são equivalentes.

SOLUÇÃO



Consideremos a mediana AM. Por terem bases congruentes e mesma altura são equivalentes os triângulos ABM e ACM e pelo mesmo motivo também o são os triângulos GBM e GCM.

$\Delta ABM \approx \Delta ACM \Rightarrow \Delta GAB + \Delta GBM \approx \Delta GAC + \Delta GCM \Rightarrow \Delta GAB \approx \Delta GAC$

Analogamente sai $\Delta GAB \approx \Delta GBC$

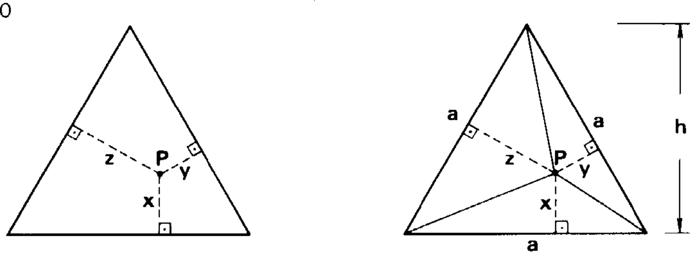
Daí vem $\Delta GAB \approx \Delta GAC \approx \Delta GBC$

OBSERVAÇÃO:

Usando a propriedade do baricentro (divide cada mediana em duas partes, tais que a que contém o vértice é o dôbro da outra) pode-se provar que a área de cada um dos três triângulos é um têrço da área do triângulo dado.

R.19 Provar que a soma das distâncias entre um ponto interior de um triângulo equilátero e os lados é constante.

SOLUÇÃO



Seja P um ponto interior qualquer de um triângulo equilátero de lado a e altura h. Sejam x, y e z as respectivas distâncias entre P e os lados.

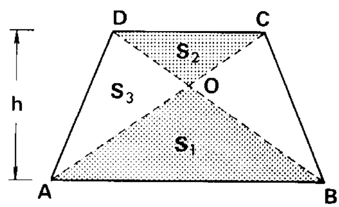
Unindo P aos vértices, obtemos três triângulos cuja soma das áreas é igual à área do triângulo dado. Então:

$$\frac{ax}{2} + \frac{ay}{2} + \frac{az}{2} = \frac{ah}{2} \Longrightarrow x + y + z = h$$

(que é constante para cada triângulo equilátero).

R.20 Dá-se um trapézio ABCD de bases AB = a, CD = b com a > b e de altura h. Demonstrar que a diferença entre as áreas dos triângulos que têm por bases AB e CD respectivamente e por vértice oposto a intersecção das diagonais é $\frac{(a - b)\ h}{2}$.

SOLUÇÃO



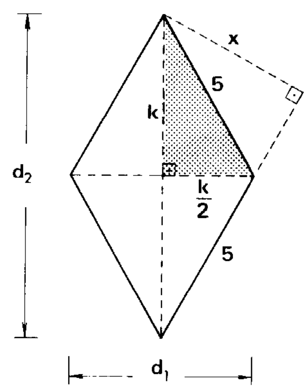
Tese: $S_1 - S_2 = \frac{(a - b)\ h}{2}$

Basta considerar o ΔOAD de área S_3

$$\left.\begin{array}{l} \text{Área } \Delta ABD = S_1 + S_3 = \dfrac{ah}{2} \\ \text{Área } \Delta ACD = S_2 + S_3 = \dfrac{bh}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow S_1 - S_2 = \frac{ah}{2} - \frac{bh}{2} = \frac{(a - b)\ h}{2}$$

R.21 As diagonais de um losango cujo lado mede 5 cm estão na razão de 1 : 2. Calcular as distâncias entre os lados paralelos.

SOLUÇÃO



$d_1 = k \qquad d_2 = 2\ k$

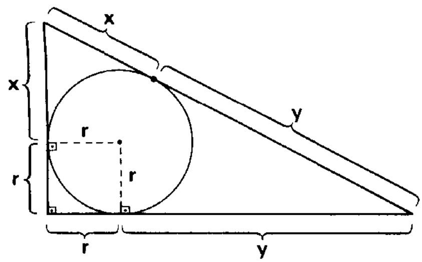
$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} A_L = \dfrac{d_1 \cdot d_2}{2} = k^2 \\ A_L = 5x \end{array}\right\} \Rightarrow 5x = k^2 \\ \text{T.P.} \Rightarrow \dfrac{k^2}{4} + k^2 = 25 \Rightarrow k^2 = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Longrightarrow 5x = 20 \Rightarrow x = 4$

RESPOSTA: 4 cm.

R.22 A área de um triângulo retângulo é igual ao produto das medidas dos segmentos determinados sôbre a hipotenusa pelo ponto de contacto do círculo inscrito no triângulo.

SOLUÇÃO



Tese: $S = x \cdot y$

DEMONSTRAÇÃO

$$S = \frac{(x+r)\cdot(y+r)}{2} \Rightarrow 2S = xy + \underbrace{xr + yr + r^2} \quad (1)$$

$$\text{T.P.} \Rightarrow (x+r)^2 + (y+r)^2 = (x+y)^2 \Rightarrow xr + yr + r^2 = xy$$

Substituindo em (1) vem:

$$2S = xy + xy \Rightarrow S = xy$$

R.23 Inscrever num círculo um retângulo de área a^2 . Discutir.

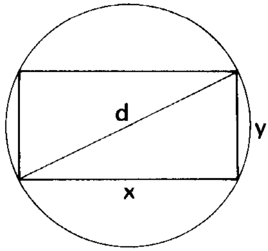
SOLUÇÃO

Sejam x e y as dimensões do retângulo e d o diâmetro do círculo.

O problema é: dados $\underline{d}$ e a área a^2, calcular x e y.

$$\text{T.P.} \Rightarrow x^2 + y^2 = d^2 \quad (1)$$

$$xy = a^2 \quad (2)$$



Multiplicando por 2 a equação (2) vem:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= d^2 \\ 2\,xy &= 2a^2 \end{aligned}\right\} \xRightarrow{*} \begin{aligned} x + y &= \sqrt{d^2 + 2a^2} \\ x - y &= \sqrt{d^2 - 2a^2} \end{aligned}$$

(*) adicionando-se e subtraindo-se.

Daí vem:

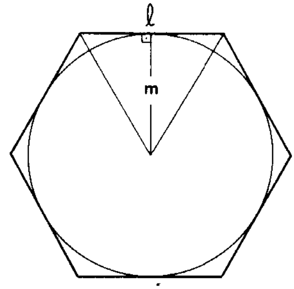
$$x = \frac{\sqrt{d^2 + 2a^2} + \sqrt{d^2 - 2a^2}}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{\sqrt{d^2 + 2a^2} - \sqrt{d^2 - 2a^2}}{2}$$

Discussão: $d^2 - 2a^2 \geqslant 0 \Rightarrow d \geqslant a\sqrt{2}$

Se $d = a\sqrt{2}$ então $x = y$ e o retângulo se reduz a um quadrado.

R.24 A área de um círculo inscrito num hexágono regular é $3\pi\ cm^2$. Calcular a área do hexágono.

SOLUÇÃO



O raio $\underline{m}$ do círculo é o apótema do hexágono

$$\pi m^2 = 3\pi \Rightarrow m = \sqrt{3}$$

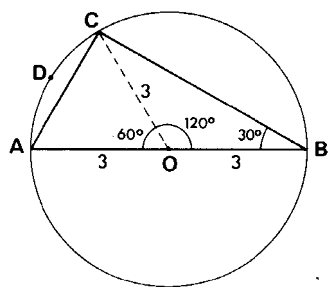
Do triângulo equilátero, vem: $\ell \dfrac{\sqrt{3}}{2} = m$

$$\frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow \ell = 2$$

$$A_{pol} = p \cdot m \Rightarrow A_{hex} = 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{3} \Rightarrow A_{hex} = 6\sqrt{3}\ cm^2.$$

R.25 AB é o diâmetro de um círculo de centro O e C é um ponto da circunferência tal que o ângulo ABC mede 30°. Calcular a área da superfície limitada pelas cordas AB e BC e pelo arco menor AC, sabendo que AB mede 6 m.

SOLUÇÃO



Área ABCD = S = Área do setor OAC + + Área ΔOBC $\Rightarrow$

$$\Rightarrow S = \frac{60}{360}\pi 3^2 + \frac{1}{2} 3 \cdot 3 \cdot \overbrace{\text{sen } 120^{\circ}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{3\pi}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{4}(2\pi + 3\sqrt{3})$$

RESPOSTA: $\dfrac{3}{4}(2\pi + 3\sqrt{3})\ m^2$

R.26 Sendo r, r_a, r_b e r_c os raios dos círculos inscritos e ex-inscritos num triângulo abc, provar que: $\dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c} = \dfrac{1}{r}$

SOLUÇÃO

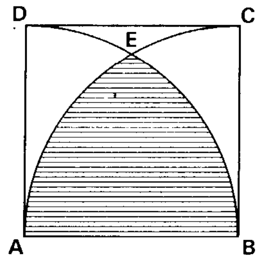
Sendo S a área do triângulo e p o semi-perímetro, temos:

$$S = (p-a)\, r_a \Rightarrow r_a = \frac{S}{p-a} \Rightarrow \frac{1}{r_a} = \frac{p-a}{S}$$

$$\frac{1}{r_b} = \frac{p-b}{S} \qquad \frac{1}{r_c} = \frac{p-c}{S} \qquad \frac{1}{r} = \frac{p}{S}$$

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{p-a}{S} + \frac{p-b}{S} + \frac{p-c}{S} = \frac{3p - \overbrace{(a+b+c)}^{2p}}{S} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r}$$

R.27 Na figura, ABCD é um quadrado de lado a. Calcular a área S da superfície ABE.



SOLUÇÃO

Notando que o $\triangle ABE$ é equilátero vem:

S = Área de um setor de 60° +

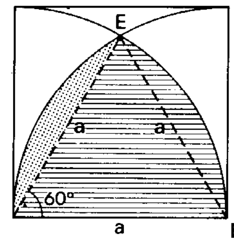
+ Área de um segmento =

$= A_{setor} + A_{setor} - A_{\triangle} \Longrightarrow$

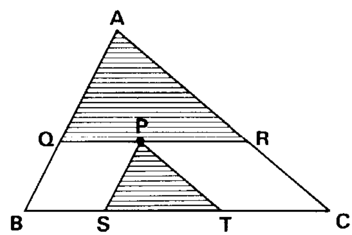
$S = 2\,A_{setor} - A_{\triangle} =$

$= 2 \cdot \dfrac{60}{360}\,\pi a^2 - \dfrac{1}{2}\,a \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$S = \dfrac{1}{3}\,\pi a^2 - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\,a^2 = \dfrac{a^2}{12}\,(4\pi - 3\sqrt{3})$



R.28 Na figura ao lado, P é o incentro do triângulo ABC, $QR \parallel BC$, $PS \parallel AB$ e $PT \parallel AC$. Se $AB = 4$, $AC = 5$ e $BC = 6$, calcular a razão entre as áreas dos triângulos AQR e PST.



SOLUÇÃO

Os triângulos AQR e PST são semelhantes. A razão entre as áreas é o quadrado da razão de semelhança.

PQBS e PRCT são losangos

Perímetro do $\triangle AQR$ =

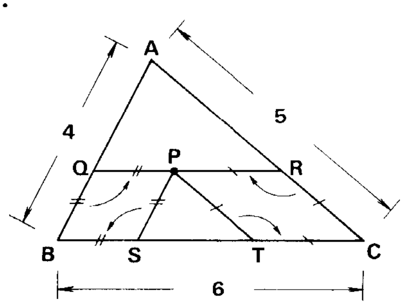
$= \underbrace{AQ + QP} + \underbrace{AR + RP} =$

$= AB + AC = 4 + 5 = 9$

Perímetro do $\triangle PST = PS + ST + PT =$

$= BS + ST + TC = BC = 6$

$\dfrac{\text{Área } \triangle AQR}{\text{Área } \triangle PST} = \left(\dfrac{9}{6}\right)^2 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4}$



VII. PROBLEMAS PROPOSTOS.

P.34 Por um ponto de uma diagonal de um paralelogramo traçam-se paralelas aos lados. Provar que dois dos paralelogramos que se obtém são equivalentes.

P.35 Calcular a área de um triângulo ABC do qual se conhecem os dados seguintes: $AC = b$, $AB = c$ e o ângulo compreendido 150^o.

P.36 Entre os triângulos de mesma base e mesmo ângulo do vértice oposto a essa base, qual o de maior área?

P.37 A soma das distâncias de um ponto da base de um triângulo isósceles aos lados iguais é constante.

P.38 Suponhamos que se percorra um triângulo num sentido determinado e que se prolongue, nesse sentido, cada lado de um comprimento igual ao próprio lado que se prolonga. Demonstrar que a área do triângulo que tem por vértices as extremidades dos prolongamentos é igual a sete vêzes a área do triângulo dado.

P.39 Sôbre os lados de um triângulo retângulo, tomados como diâmetros, constroem-se semi-circunferências exteriores ao triângulo. Qual a relação entre as áreas dos semi-círculos determinados?

P.40 (EESCUSP - 62) Mostrar que um triângulo de lados a, b, c inscrito num círculo de raio R tem área igual a $\frac{abc}{4R}$.

P.41 Sendo r o raio do círculo inscrito e r_a, r_b, r_c os raios dos círculos ex-inscritos num triângulo de área S, provar que

$$S = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}$$

P.42 Calcular a área de um setor circular de raio r e ângulo central medindo:

a) 30^o b) 45^o c) 60^o d) 90^o

e) 120^o f) 135^o g) 150^o

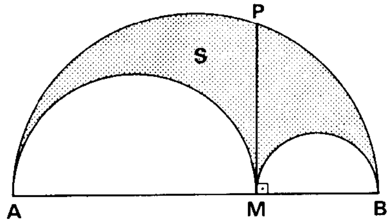
P.43 Calcular a área de um segmento circular de um círculo de raio R e ângulo central medindo:

a) 30^o b) 45^o c) 60^o d) 90^o

e) 120^o f) 135^o g) 150^o

P.44 (EPUSP - 67) Calcular a área da superfície limitada por seis círculos de raio unitário com centros nos vértices de um hexágono regular de lado 2.

P.45 Sejam, um semi-círculo C de diâmetro AB = 2r, um ponto M pertencente a AB e MP ⊥ AB.
Construamos os semi-círculos AM e MB. Os três semi-círculos limitam uma superfície S (região hachurada). Mostrar que a área de S é igual à área do círculo de diâmetro MP .



P.46 (FAUUSP - 67) Duas circunferências iguais de raio r, tangentes entre si, tangenciam internamente uma outra circunferência de raio 3r. Calcular a menor das duas áreas limitadas por arcos das três circunferências.

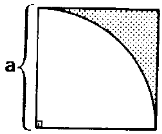
P.47 (ITA - 65) Dado um triângulo equilátero e sabendo-se que existe outro triângulo inscrito com os lados respectivamente perpendiculares aos do primeiro, calcular a relação entre as áreas dos dois triângulos.

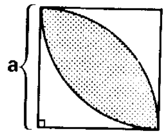
P.48 (EEMAUÁ - 66) A superfície de um triângulo retângulo é $120cm^2$ e sua hipotenusa vale $\underline{a}$ cm. Determinar os catetos e o menor valor que $\underline{a}$ pode tomar.

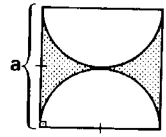
P.49 (FAUUSP - 67) É dada uma sequência infinita de quadriláteros, cada um, a partir do segundo, tendo por vértices os pontos médios dos lados do anterior. Determinar a soma das áreas dos quadriláteros em função da área A do primeiro.

P.50 (FAUUSP - 70) Num terreno em forma de triângulo retângulo, de catetos 32 e 27, quer se construir um edifício de base retangular, de lados paralelos aos catetos. Quais devem ser as dimensões da base do edifício de modo a haver maior aproveitamento do terreno?

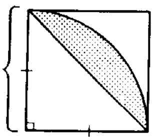
P.51 Calcular a área da parte hachurada

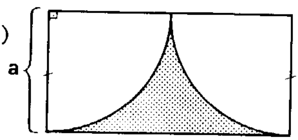
1ª) 

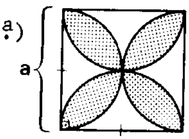
2ª) 

3ª) 

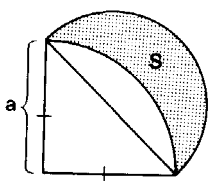
P.52 Calcular a área da superfície hachurada.

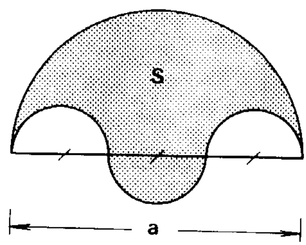
1ª) 

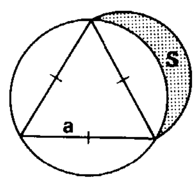
2ª) 

3ª) 

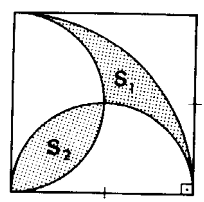
P.53 Calcular a área da superfície hachurada



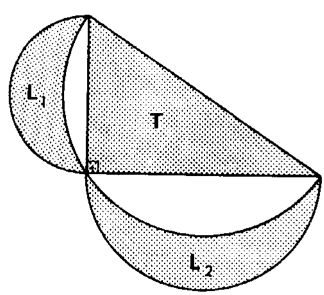




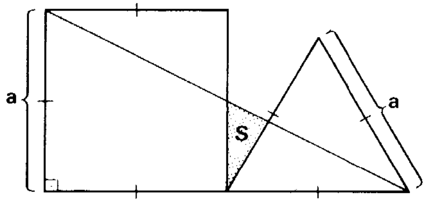
P.54 Na figura ao lado prove que a área S_1 é igual a S_2



P.55 Na figura ao lado prove que a soma das áreas de L_1 e L_2 $(L_1 + L_2)$ é igual à área do triângulo T.



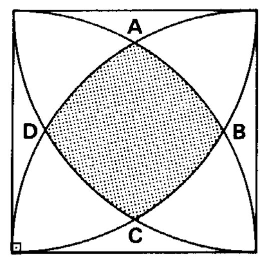
P.56 Calcular a área S .



P.57 Num círculo de raio R (dado) a corda AB é o ℓ_4, C pertence ao menor dos arcos AB, BC = ℓ_6 e D pertence ao menor dos arcos AC. Calcular a área da região ABCD.

P.58 Calcular a área da superfície indicada. É dado o lado a do quadrado.

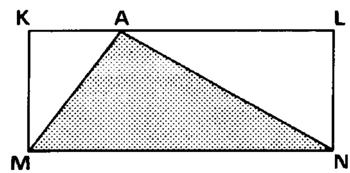
SUGESTÃO: Note que a corda AB é lado de um dodecágono regular.



VIII. TESTES.

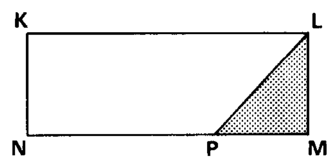
T.28 A área do retângulo KLMN é 100 e MN = 20. A área do triângulo AMN se A é um ponto de KL é:

a) 25 ; b) 50 ;
c) 75 ; d) 100;
e) Nenhuma das anteriores.



T.29 $MP = \frac{MN}{3}$, sendo MN a base do retângulo KNML. A área do triângulo LMP é igual a 8. A área do retângulo KNML é:

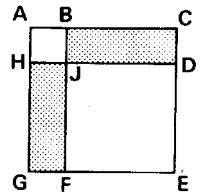
a) 24 ; b) 32 ;
c) 48 ; d) 72 ;
e) 96 .



T.30 ABJH, JDEF, ACEG são quadrados e BC = 3AB.

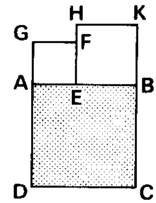
A razão entre as áreas dos retângulos BCDJ e HJFG é:

a) $\frac{1}{9}$;　　b) $\frac{1}{3}$;
c) 1 ;　　d) 3 ;　　e) 9 .



T.31 A área do quadrado GAEF é 25 e a área do quadrado HEBK é 100. A área do quadrado ADCB é igual a:

a) 125;　　b) 225 ;
c) 600;　　d) 625 ;　　e) 5000.



T.32 Se a base de um retângulo é aumentada de 10 % e a área permanece a mesma, a altura diminui de:

a) 9 % ;　　d) 11 % ;
b) 10 % ;　　e) Nenhuma das respostas anteriores.
c) $9\frac{1}{11}$ % ;

T.33 A área do triângulo retângulo ABC no qual a hipotenusa AC = 13 e BC = 12 é igual a:

a) 30 ;　　d) 78 ;
b) 39 ;　　e) 156 .
c) 80 ;

T.34 A área do triângulo retângulo ABC, B = 90° e A = 45° é igual a 18. A hipotenusa AC é igual a:

a) $3\sqrt{2}$;　　d) $12\sqrt{2}$;
b) $6\sqrt{2}$;　　e) $7\sqrt{2}$;
c) $9\sqrt{2}$;

T.35 A área de um triângulo é $224\sqrt{2}$ e dois de seus lados são 28 e 32. O ângulo formado por êsses lados é:

a) 45° ;　　d) 120° ;
b) 135° ;　　e) Nenhuma das respostas anteriores.
c) 45° ou 135° ;

T.36 O perímetro de um triângulo retângulo isósceles é 2p. A área do triângulo é:

a) $(2 + \sqrt{2})p$;

b) $(2 - \sqrt{2})p$;

c) $(3 - 2\sqrt{2})p^2$;

d) $(1 - 2\sqrt{2})p^2$;

e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.37 De um ponto P situado no interior de um triângulo ABC são traçados os segmentos PA, PB, PC. Uma condição necessária e suficiente para que os triângulos formados tenham áreas iguais é que o ponto P seja:

a) centro da circunferência inscrita;

b) centro da circunferência circunscrita;

c) intersecção das medianas;

d) intersecção das alturas;

e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.38 A área de um losango é 300, e as diagonais estão na razão 2 : 3. O comprimento do lado do losango é:

a) $2\sqrt{15}$;

b) $2\sqrt{195}$;

c) $10\sqrt{2}$;

d) 20 ;

e) $5\sqrt{13}$;

T.39 A área de um losango em função de seu lado a e de um de seus ângulos α é:

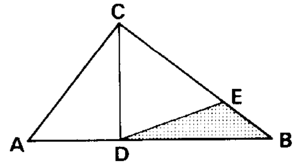
a) $a^2 \operatorname{sen} \alpha$;

b) $2a^2 \operatorname{sen} \alpha$;

c) $\frac{a^2}{2} \operatorname{sen} \alpha$;

e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.40 O triângulo ABC é retângulo em C, $CD \perp AB$, $BC = 4\ BE$, $AD = 4$ e $BD = 12$. A área do triângulo BDE é:



a) 6 ;

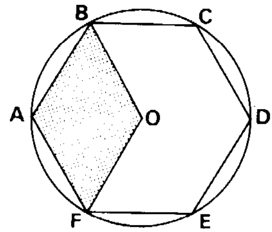
b) $12\sqrt{3}$;

c) 12 ;

d) $8\sqrt{3}$;

e) $6\sqrt{3}$.

T.41 Na figura, o hexágono regular ABCDEF está inscrito no círculo de centro O. Se AB = 4, a área do quadrilátero ABOF é igual a:



a) 16 ;
b) $16\sqrt{3}$;
c) $16\sqrt{2}$;
d) $8\sqrt{3}$;
e) $8\sqrt{2}$.

T.42 A área de um círculo de raio $\underline{r}$ é igual à área de um retângulo de base $\underline{b}$. A altura do retângulo é:

a) $\sqrt{\pi r}$;
b) $\dfrac{2\pi r}{6}$;
c) $\pi r^2 b$;
d) $\dfrac{\pi r^2}{b}$;
e) $\dfrac{\pi r^2}{b^2}$.

T.43 A área de um círculo inscrito em um triângulo equilátero é 48π. O perímetro do triângulo é:

a) $72\sqrt{3}$;
b) $48\sqrt{3}$;
c) 36 ;
d) 24 ;
e) Nenhuma das respostas anteriores.

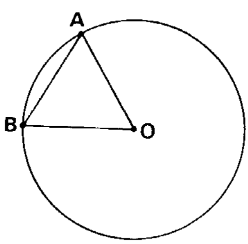
T.44 A área de um círculo inscrito em um hexágono regular é 100π cm^2 . A área do hexágono é:

a) 600 cm^2 ;
b) 300 cm^2 ;
c) $200\sqrt{2}$ cm^2;
d) $200 \cdot \sqrt{3}$ cm^2;
e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.45 A área do triângulo equilátero inscrito em um círculo de raio 8 é:

a) $48\sqrt{3}$;
b) 48 ;
c) $16\sqrt{3}$;
d) $24\sqrt{3}$;
e) 24 .

T.46 No círculo de centro O, AB = OA e a área do triângulo AOB é $4\sqrt{3}$. A área do círculo é igual a:



a) 4π;
b) 8π;
c) 16π;
d) $24\sqrt{3}$;
e) $24\pi\sqrt{3}$.

T.47 Na figura anterior, $OB \perp OA$ e a área do triângulo OAB é 32. A área do círculo de centro O é:

a) 16π ; b) 32π ;

c) 64π ; d) 128π ;

e) 256π .

T.48 A área do maior triângulo que pode ser inscrito em um semi-círculo de raio r é:

a) r^3

b) $2\ r^2$

c) $2\ r^3$

d) r^2

e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.49 Se o raio de um círculo é aumentado de 100 % a área do círculo aumenta de:

a) 100 % ;

b) 200 % ;

c) 400 % ;

d) 300 % ;

e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.50 Se o raio de um círculo aumenta 50 %, a área do círculo aumenta de

a) 25 % ;

b) 50 % ;

c) 100 % ;

d) 125 % ;

e) 250 % .

T.51 As medidas dos lados de um triângulo são 5, 6 e 7. O raio da circunferência inscrita mede:

a) $\dfrac{2 \cdot \sqrt{6}}{3}$;

b) $\dfrac{3 \cdot \sqrt{6}}{2}$;

c) $6 \cdot \sqrt{6}$;

d) $2 \cdot \sqrt{6}$;

e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.52 A base de um triângulo isósceles é 6 e um dos lados iguais é igual a 12. O raio da circunferência circunscrita é:

a) $\dfrac{8\ \sqrt{15}}{5}$;

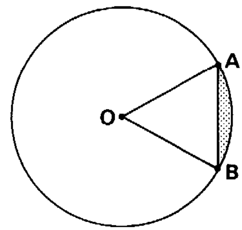
b) $4\ \sqrt{3}$;

c) $3\ \sqrt{5}$;

d) $6\ \sqrt{3}$;

e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.53 No círculo de centro O, OA = 6 e o ângulo AOB = 60°. A área da parte hachurada é:

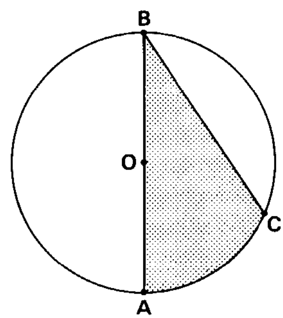


a) 2π ; b) $4\pi - \sqrt{3}$;
c) $6\pi - 9\sqrt{3}$; d) $36\pi - 9\sqrt{3}$
e) $36\pi - 36$.

T.54 No círculo de centro O, OA = 6 e $OA \perp OB$ (figura anterior). A área da parte hachurada é:

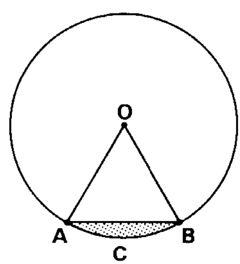
a) 2π ; d) $9\pi - 18$;
b) $\pi - 2$; e) $36\pi - 9\sqrt{3}$.
c) $6\pi - 9\sqrt{3}$;

T.55 Na figura, AB é o diâmetro do círculo de centro O e C é um ponto da circunferência tal que o ângulo ABC = 30°. Se AB = 6, a área da parte da circunferência limitada pelas cordas BC e AB e o arco menor AC é igual a:



a) $9\sqrt{3}$; b) $\frac{3\pi}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{4}$
c) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{3\pi}{4}$
e) $6\pi + \frac{9\sqrt{3}}{4}$

T.56 Na figura, O é o centro do círculo de raio 12 e o ângulo AOB = 30°. A área do segmento ACD é igual a:

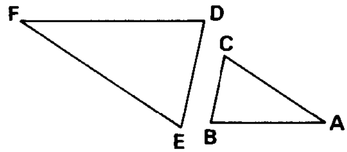


a) $2\pi - 36$; b) $12\pi - 36$;
c) $12\pi - 36\sqrt{3}$; d) $24\pi - 36\sqrt{3}$;
e) $18\pi - 36\sqrt{2}$.

T.57 Qual é a razão entre as áreas de um círculo inscrito e outro circunscrito a um mesmo triângulo equilátero de lado <u>a</u> ?

a) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{4}$
b) $\frac{2}{3}$ e) Nenhuma das respostas anteriores.
c) $\frac{3}{4}$

T.58 Na figura AB // DF, DE // BC, AC // EF. Se AB = 6, AC = 5, BC = 3 e DE = 8, a razão entre as áreas dos triângulos ABC e DEF é:

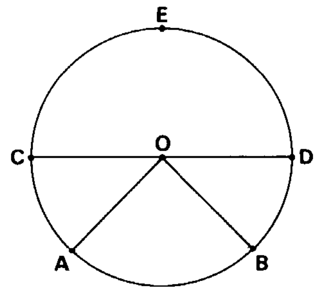


a) $\frac{6}{8}$; b) $\frac{9}{64}$;

c) 4 ; d) $\frac{3}{8}$;

e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.59 Na figura, CE e DE são cordas iguais de um círculo de centro O. O arco AB é igual a $\frac{1}{4}$ da circunferência. Nestas condições, a razão da área do triângulo CED para a área do triângulo AOB é:

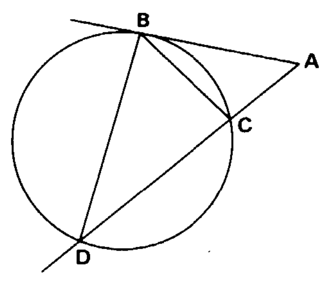


a) $\sqrt{2}$; b) $\sqrt{3}$;

c) 4 ; d) 2 ;

e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.60 Na figura, AB é tangente ao círculo, AB = 6, AC = 4. A razão da área do triângulo ABC para a área do triângulo BDC é:

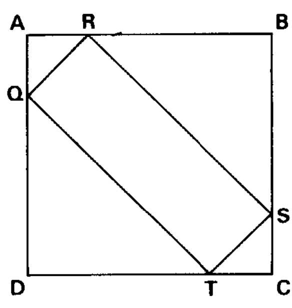


a) $\frac{5}{4}$; b) $\frac{4}{5}$;

c) $\frac{2}{3}$; d) $\frac{4}{9}$;

e) $\frac{9}{4}$.

T.61 O retângulo QRST é inscrito no quadrado ABCD como mostra a figura. Se QR : RS = 2 : 5, dar a razão da área de QRST para a área de ABCD:



a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{10}{49}$;

c) $\frac{10}{29}$; d) $\frac{2}{5}$;

e) $\frac{20}{49}$

T.62 A área de um quadrado inscrito em um semi-círculo está para a área do quadrado inscrito no mesmo círculo como:

a) $\frac{1}{2}$;

b) $\frac{2}{3}$;

c) $\frac{3}{4}$;

d) $\frac{2}{5}$;

e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.63 Um quadrado de área 40 é inscrito em um semi-círculo de raio $\underline{r}$. A área do quadrado inscrito no círculo de raio $\underline{r}$ é:

a) 80 ;

b) 100 ;

c) 120 ;

d) 160 ;

e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.64 A base de um triângulo é $\underline{b}$ e a altura $\underline{h}$. Um retângulo de altura $\underline{x}$ é inscrito no triângulo com a base na base do triângulo. A área do retângulo é:

a) $\frac{hx\ (b-x)}{b}$;

b) $\frac{bx\ (h-x)}{h}$;

c) $\frac{bx\ (h-2x)}{h}$;

d) $\frac{1}{4}$;

e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.65 Um triângulo equilátero de lado 2 é dividido em um triângulo e um trapézio por uma reta paralela a um de seus lados. Se a área do trapézio é igual à metade da área do triângulo primitivo, o comprimento da base média do trapézio é:

a) $\frac{\sqrt{6}}{2}$;

b) $\sqrt{2}$;

c) $2 + \sqrt{2}$

d) $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$;

e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.66 O raio de um círculo é 1, de um segundo círculo, $\frac{1}{2}$, de um terceiro, $\frac{1}{4}$, assim por diante, formando os raios uma progressão infinita. A soma das áreas dos círculos é:

a) 4π;

b) $4\pi\ \sqrt{3}$;

c) 2π ;

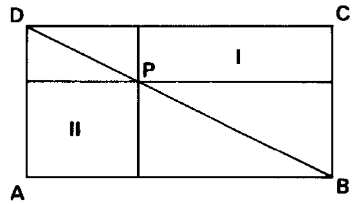
d) $\frac{4\pi}{3}$;

e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.67 A área de um círculo é dobrada quando seu raio $\underline{r}$ é aumentado de $\underline{n}$. Então, $\underline{r}$ é igual a:

a) $n(\sqrt{2} - 1)$;
b) n ;
c) $n(\sqrt{2} + 1)$;
d) $n(2 - \sqrt{2})$;
e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.68 (FEIUC - 68) É dado um retângulo ABCD e um ponto P da diagonal. Podemos afirmar, sôbre os retângulos I e II que:



a) área (I) > área (II);
b) área (I) = área (II);
c) II é sempre um quadrado;
d) a relação entre as áreas de (I) e (II) depende da posição de P.
e) Nenhuma das respostas anteriores

T.69 (FFCLUSP - 67) A soma das distâncias de um ponto P da base de um triângulo isósceles aos lados

a) aumenta quando P se aproxima do ponto médio da base;
b) diminui quando P se aproxima do ponto médio da base;
c) independe do ângulo do vértice;
d) independe do ponto P da base;
e) Nenhuma das afirmações anteriores é verdadeira.

T.70 (FEIUC - 66) A diagonal de um quadrado é $a + b$; a diagonal de outro quadrado cuja área é o dôbro da do primeiro é:

a) $(a+b)^2$;
b) $\sqrt{2}(a+b)$;
c) $2a + 2b$;
d) $a^2 + b^2$;
e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.71 (CICE - 68) A altura de um triângulo equilátero T tem comprimento igual ao do lado de um triângulo equilátero S. Sabendo-se que a área de S é 10 m^2, a área de T será:

a) $\frac{40}{3}$ m^2 ;
b) $\frac{30}{4}$ m^2 ;
c) $10\sqrt{3}$ m^2;
d) $\frac{20}{\sqrt{3}}$ m^2 ;
e) $\frac{20}{\sqrt{3}}$ m^2 .

T.72 (EESCUSP - 68) A área de um triângulo equilátero, circunscrito a um círculo de raio r é:

a) $\frac{5}{2} r^2$;
b) $\pi \sqrt{3}\ r^2$;
c) $3\sqrt{2}\ r^2$;
d) $3\sqrt{3}\ r^2$;
e) $\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{2}} r^2$.

T.73 (CICE - 68) Sejam $\underline{p}$ o perímetro e $\underline{h}$ a altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo. Qual das expressões abaixo fornece a área $\underline{S}$ dêsse triângulo?

a) $S = h \cdot p$;
b) $S = \frac{1}{2} hp^2$;
c) $S = h^2 + p^2$;
d) $S = \frac{hp^2}{4(h+p)}$;
e) $S = \frac{h^2 + p^2}{h+p}$.

T.74 (EPUSP - 65) A circunferência I passa pelo centro da circunferência II e lhe é tangente. Sendo 4 a área limitada pela circunferência I, a área limitada pela circunferência II será:

a) 8 ;
b) $8\sqrt{2}$;
c) 8π ;
d) 16 ;
e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.75 (CESCEM - 70) Se um retângulo e um círculo têm a mesma área, então:
a) êles tem o mesmo perímetro;
b) o retângulo tem perímetro maior;
c) o círculo tem perímetro maior;
d) dependendo das dimensões do retângulo, êle pode ter perímetro igual, ou menor do que o do círculo;
e) Nenhuma das anteriores.

T.76 (CICE - 70) A soma dos inversos das alturas de qualquer triângulo é igual:
a) à soma dos inversos dos lados;
b) ao inverso do raio do círculo inscrito;
c) ao inverso do raio do círculo circunscrito;
d) à razão do raio do círculo inscrito para o quadrado do raio do círculo circunscrito.
e) a nenhum dêstes.

T.77 (EPUSP - 68) Um círculo é dividido por uma corda de comprimento igual ao raio em duas regiões cujas áreas são proporcionais a:

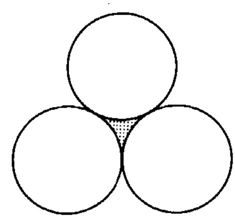
a) 1 e 5;
b) 1 e 11;
c) $10\pi - 3\sqrt{3}$ e $2\pi + 3\sqrt{3}$;
d) $2\pi - 3\sqrt{3}$ e $10\pi + 3\sqrt{3}$;
e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.78 (CICE - 70) Considere um triângulo equilátero DEF inscrito num triângulo equilátero ABC, de modo que os lados sejam respectivamente perpendiculares. Então a área de DEF é:

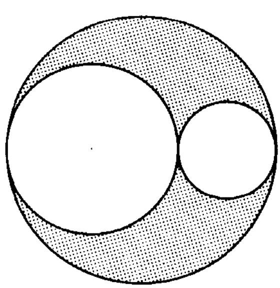
a) $\frac{1}{4}$ da área de ABC;
b) $\frac{1}{3}$ da área de ABC;
c) $\frac{1}{5}$ da área de ABC;
d) a metade da área de ABC
e) Nada disso.

T.79 (CICE - 70) Três círculos de mesmo raio r são tangentes exteriormente dois a dois. Então a área assinalada é:

a) $\frac{r^2}{2}(2\sqrt{3} - \pi)$;
b) $\frac{r^2}{2}(3\sqrt{2} - \pi)$;
c) $\frac{r^2}{2}(3\sqrt{3} - \pi)$;
d) $\frac{r^2}{2}(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2})$;
e) Nada disso.

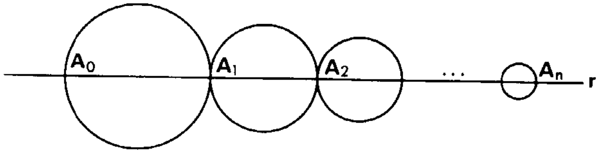


T.80 (CICE - 70) Na figura abaixo, r é o raio do círculo maior e t é o comprimento da tangente AB comum aos dois círculos menores. Então a área assinalada, compreendida entre o círculo maior e os dois menores, é igual a:



a) $\frac{\pi r^2}{8}$;
b) $\frac{\pi r t}{8}$
c) $\frac{\pi t^2}{8}$
d) $\frac{\pi(t-r)^2}{8}$
e) Nada disso

T.81 (CESCEM - 70) As bolas abaixo têm centros sôbre a reta $\underline{r}$ e são tangentes exteriormente tendo, cada uma, metade da área da anterior Sabendo-se que a primeira tem diâmetro igual à $\underline{d}$, a distância do ponto A_0 ao ponto A_n tende (quando $n \to \infty$) à:



a) infinito

b) 2d

c) $\frac{4d}{3}$

d) $d(2 + \sqrt{2})$

e) $\frac{(\sqrt{2} + \pi)}{4}$

T.82 (CESCEM - 71) Em um triângulo equilátero de área unitária inscreve-se um triângulo cujos vértices são os pontos médios dos lados daquele; nêste triângulo inscreve-se um outro cujos vértices são os pontos médios de seus lados, e assim sucessivamente. O limite da soma das áreas dos triângulos que foram inscritos vale:

a) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{7}{3}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{3}$

e) Nenhuma das respostas anteriores.

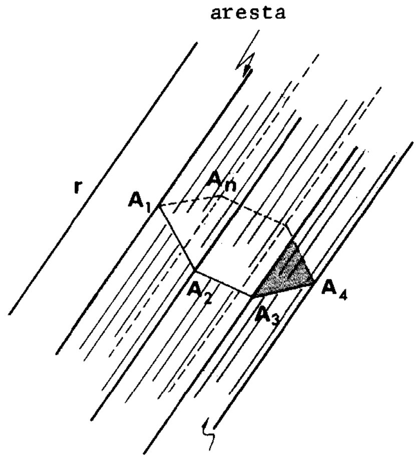
CAPÍTULO IV

PRISMA

I. PRISMA ILIMITADO.

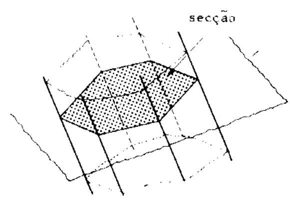
69• DEFINIÇÃO

Consideremos uma região poligonal convexa plana $A_1\ A_2\ \ldots\ A_n$ de $\underline{n}$ lados e uma reta $\underline{r}$ não paralela nem contida no plano da região. Chama-se *prisma ilimitado convexo* ou *prisma convexo indefinido* à reunião das retas paralelas a $\underline{r}$ e que passam pelos pontos da região poligonal dada.



70• ELEMENTOS

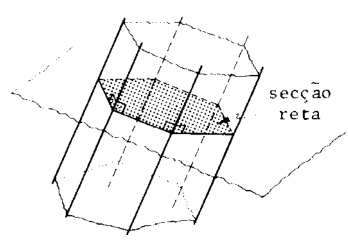
Um prisma ilimitado convexo possui: $\underline{n}$ arestas, $\underline{n}$ diedros e $\underline{n}$ faces (que são faixas de planos).



71• SECÇÕES

Secção é uma região poligonal plana com um só vértice em cada aresta.

Secção reta ou *secção normal* é uma secção cujo plano é perpendicular às arestas.



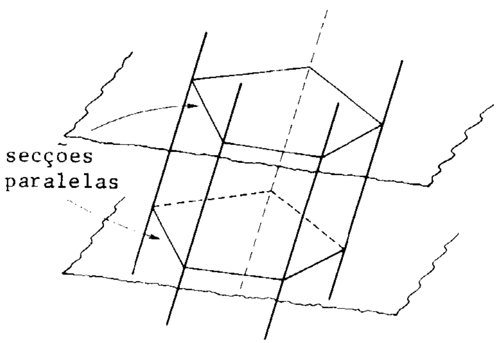
72• SUPERFÍCIE

A superfície de um prisma ilimitado convexo é a reunião das faces dêsse prisma. É chamada superfície prismática convexa ilimitada ou indefinida.

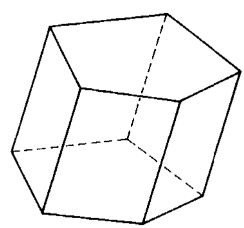
II. PRISMA.

73• DEFINIÇÃO

Prisma convexo limitado ou *prisma convexo definido* ou *prisma convexo* é a reunião da parte do prisma convexo ilimitado, compreendida entre os planos de duas secções paralelas e distintas, com estas secções.



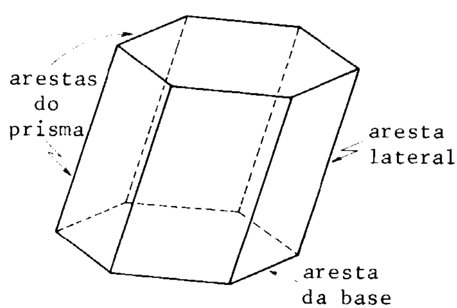
Prisma ilimitado


Prisma

74• ELEMENTOS

O prisma possui:

2 bases congruentes (as secções citadas acima),
n faces laterais (paralelogramos), n + 2 faces,
n arestas laterais,
3n arestas, 3n diedros,
2n vértices e 2n triedros.



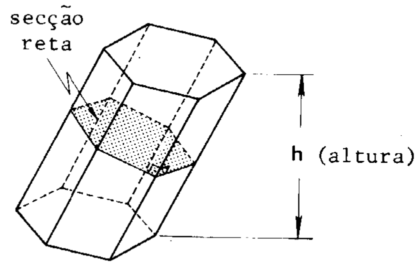
Prisma (hexagonal)

75• ALTURA

Altura de um prisma é a distância h entre os planos das bases.

76• SECÇÃO RETA OU SECÇÃO NORMAL

É a região poligonal plana com um vértice em cada aresta lateral, cujo plano é perpendicular a uma, logo, a tôdas as arestas laterais.



77• SUPERFÍCIE

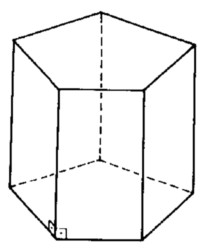
Superfície lateral é a reunião das faces laterais.

Superfície total é a reunião da superfície lateral com as bases

78• PRISMA RETO

É um prisma cujas arestas laterais são perpendiculares ao plano da base.

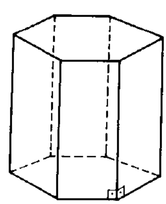
Caso contrário, o prisma é dito oblíquo.



Prisma reto (pentagonal)

79• PRISMA REGULAR

É um prisma reto cujas bases são regiões poligonais regulares.



Prisma regular (hexagonal)

III. PARALELEPÍPEDO E ROMBOEDRO.

80• PARALELEPÍPEDO

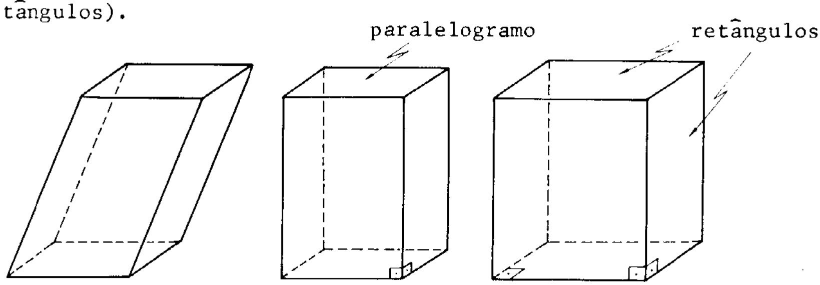
É um prisma cujas bases são paralelogramos (superfície: 6 paralelogramos).

81• PARALELEPÍPEDO RETO

É um prisma reto cujas bases são paralelogramos (superfície: 4 retângulos e 2 paralelogramos).

82• PARALELEPÍPEDO RETO-RETÂNGULO OU PARALELEPÍPEDO RETÂNGULO OU ORTOEDRO

É um paralelepípedo reto cujas bases são retângulos. (superfície: 6 retângulos).



Paralelepípedo (oblíquo) — Paralelepípedo reto — Paralelepípedo retângulo

83• ROMBOEDRO

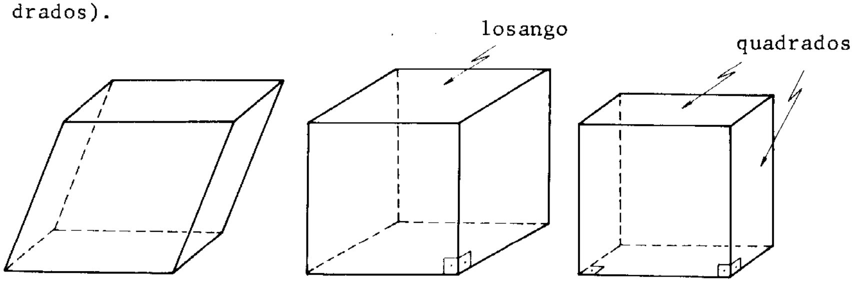
É um paralelepípedo que possui as doze arestas congruentes entre si (superfície: 6 losangos).

84• ROMBOEDRO RETO

É um paralelepípedo reto que possui as doze arestas congruentes entre si: (superfície: 4 quadrados e 2 losangos).

85• ROMBOEDRO RETO-RETÂNGULO OU CUBO

É um romboedro reto cujas bases são quadrados. (superfície: 6 quadrados).



Romboedro (oblíquo) — Romboedro reto — Romboedro reto-retângulo

IV. EQUIVALÊNCIA ENTRE PRISMAS.

A equivalência entre prismas e entre paralelepípedos pode ser estabelecida de maneira análoga à utilizada para as regiões poligonais e paralelogramos.

IV - A. DEFINIÇÕES.

86• PRISMAS CONTÍGUOS OU ADJACENTES

Dois prismas são contíguos ou adjacentes quando têm em comum somente pontos de suas superfícies (sem ter pontos interiores comuns).

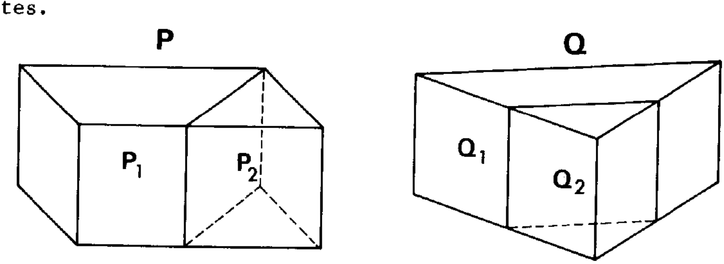
87• SOMA DE PRISMAS

a) Dados dois sólidos P_1 e P_2 contíguos define-se soma $P_1 + P_2$ ao sólido constituído por todos os pontos de P_1 e todos os de P_2 (comuns e não comuns).

b) Dados dois prismas P_1 e P_2 quaisquer, define-se soma $P_1 + P_2$ como sendo a soma dos prismas contíguos P_1' e P_2' em que P_1' é congruente a P_1 e P_2' é congruente a P_2.

88• EQUIVALÊNCIA ENTRE PRISMAS

Dois prismas são chamados equivalentes ou equicompostos se, e somente se, forem somas de *igual número* de prismas dois a dois congruentes.



$$(P = P_1 + P_2,\ Q = Q_1 + Q_2,\ P_1 \equiv Q_1,\ P_2 \equiv Q_2) \Longrightarrow P \approx Q$$

IV - B. PROPRIEDADES FORMAIS.

Com estas definições, a equivalência (por equi-decomposição) torna-se uma relação entre prismas para a qual valem (do mesmo modo que para a equivalência entre polígonos) as seguintes propriedades formais:

PE - 1. Reflexiva: $P \approx P$

PE - 2. Simétrica: $P \approx Q \iff Q \approx P$

PE - 3. Transitiva: $\left.\begin{array}{l} P \approx Q \\ Q \approx R \end{array}\right\} \Longrightarrow P \approx R$

PE - 4. Uniforme:

"Somas de prismas dois a dois equivalentes são sólidos equivalentes".

PE - 5. Disjuntiva - Postulado de De Zolt

"Um prisma que é soma de dois ou mais outros não é equivalente a uma das parcelas."

IV - C. REDUÇÃO DE PRISMAS POR EQUIVALÊNCIA.

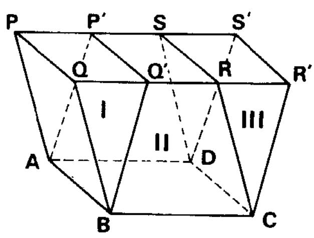
Empregando as definições e propriedades acima demonstram-se (do mesmo modo e na mesma sequência que para os polígonos) os teoremas que permitem estabelecer a equivalência entre um prisma qualquer e um paralelepípedo retângulo (lá, entre um polígono qualquer e um retângulo).

89• TEOREMA 1

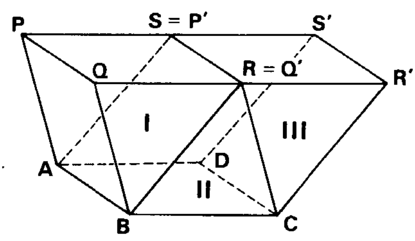
Dois paralelepípedos de bases e alturas respectivamente congruentes são equivalentes.

Para demonstrar supõe-se (sem perda de generalidade) que as bases congruentes coincidem e examinam-se os quatro casos que podem ocorrer.

1º caso



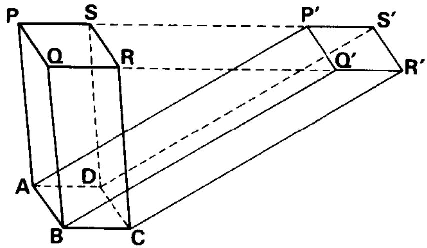
2º caso

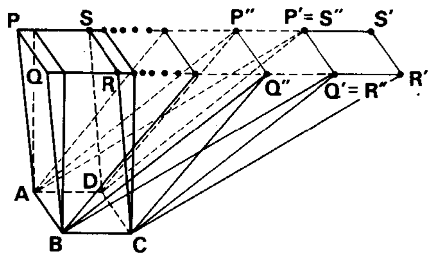


Para os dois primeiros casos temos:

$I \equiv III \Rightarrow I + II \approx II + III \Rightarrow ABCDPQRS \approx ABCDP'Q'R'S'$

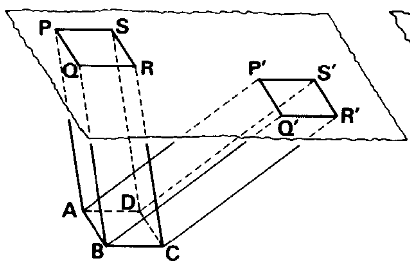
3º caso: Aplicando-se sucessivamente os casos anteriores e a transitiva, sai a equivalência entre ABCDPQRS e ABCDP'Q'R'S'.

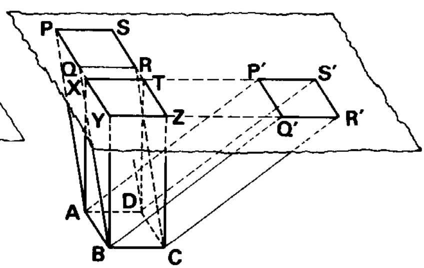




$$ABCDP'Q'R'S' \approx ABCDP''Q''R''S'' \approx \ldots \approx ABCDPQRS$$

4º caso:





Para provar a equivalência entre ABCDPQRS e ABCDP'Q'R'S' usa-se o paralelepípedo ABCDXYZT que está para cada um dos dados num dos 3 casos anteriores:

$$ABCDPQRS \approx ABCDXYZT \approx ABCDP'Q'R'S' \implies ABCDPQRS \approx ABCDP'Q'R'S'$$

90• Devido ao teorema anterior temos em particular que:
"Todo paralelepípedo é equivalente a um paralelepípedo retângulo de base equivalente e altura congruente."

91• TEOREMA 2

Todo prisma triangular é equivalente a um paralelepípedo de mesma altura e base equivalente à do prisma.
Para demonstrar vide item 41 e a decomposição usada em 88

92• TEOREMA 3

Todo prisma cuja base é um polígono de $\underline{n}$ lados $(n > 3)$ é equivalente a um prisma de mesma altura cuja base é um polígono de $n-1$ lados, equivalente à base do prisma inicial.

Para demonstrar, empregar a transformação das bases em polígonos equivalentes de $n-1$ lados como no item 43.

CONCLUSÕES:

Como resultado dos teoremas 1, 2 e 3 pode-se reduzir por equivalência um prisma cuja base é um polígono de $n > 3$ lados a um prisma triangular equivalente, êste a um paralelepípedo equivalente e êste a um paralelepípedo retângulo equivalente, bastando manter a mesma altura para todos êles.
Então vale:

93• *Todo prisma é equivalente a um paralelepípedo retângulo de mesma altura e base equivalente.*

V. VOLUME DO PRISMA.

V-A. VOLUME DE UM SÓLIDO.

94• DEFINIÇÃO

Volume de um sólido é um número real positivo associado ao sólido de forma tal que:

1º) A sólidos equivalentes estão associados volumes iguais (números iguais) e reciprocamente.

$$S_1 \approx S_2 \iff \text{volume de } S_1 = \text{Volume de } S_2$$

2º) A uma soma de sólidos está associado um volume (número) que é a soma dos volumes dos sólidos parcelas.

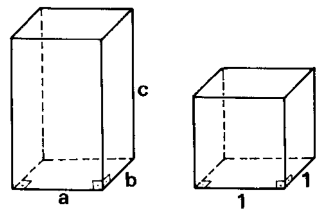
$$S_1 = S_2 + S_3 \Longrightarrow \text{Volume de } S_1 = \text{Volume de } S_2 + \text{Volume de } S_3$$

3º) Se um sólido está contido (pròpriamente) em outro, então seu volume é menor que o volume do outro

$$S_1 \subset S_2 \Rightarrow \text{Volume de } S_1 < \text{Volume de } S_2$$

95• Volume de um paralelepípedo retângulo é a razão entre o paralelepípedo retângulo e o paralelepípedo retângulo unitário (cubo unitário).

$$V = \frac{P(a,\ b,\ c)}{P(1,\ 1,\ 1)}$$



P(a,b,c) P(1,1,1)

96• Volume de um prisma

É o volume do paralelepípedo retângulo a êle equivalente.

V - B. RAZÃO ENTRE PARALELEPÍPEDOS RETÂNGULOS.

97• TEOREMA

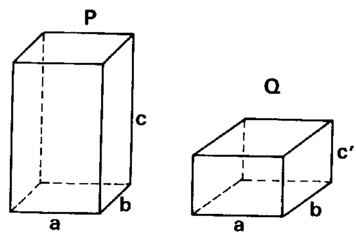
"A razão entre dois paralelepípedos retângulos de bases congruentes é igual à razão entre suas alturas".

A demonstração dêste teorema segue a mesma sequência e é análoga à do teorema do item 48.

Como conclusão temos:

Se P é um paralelepípedo retângulo de dimensões <u>a</u>, <u>b</u> e <u>c</u> e Q é outro de dimensões <u>a</u>, <u>b</u> e <u>c'</u> então

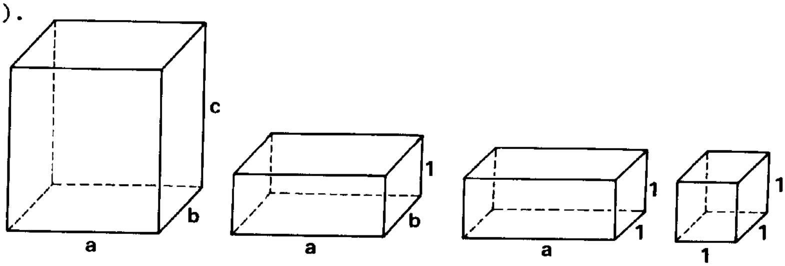
$$\frac{P(a,\ b,\ c)}{Q(a,\ b,\ c')} = \frac{c}{c'}$$



V - C. DEDUÇÃO DAS FÓRMULAS.

98• VOLUME DO PARALELEPÍPEDO RETÂNGULO DE DIMENSÕES a, b, c

Seja P(a, b, c) o paralelepípedo retângulo e sejam P (a, b, 1), P(a, 1, 1) e P(1, 1, 1) outros paralelepípedos retângulos onde 1 é o segmento unitário (consequentemente, P(1, 1, 1) é o cubo unitário).



$$\frac{P(a,\ b,\ c)}{P(a,\ b,\ 1)} = \frac{c}{1} \quad (1) \qquad \text{bases } (a,\ b) \text{ congruentes}$$

$$\frac{P(a,\ b,\ 1)}{P(a,\ 1,\ 1)} = \frac{b}{1} \quad (2) \qquad \text{bases } (a,\ 1) \text{ congruentes}$$

$$\frac{P(a,\ 1,\ 1)}{P(1,\ 1,\ 1)} = \frac{a}{1} \quad (3) \qquad \text{bases } (1,\ 1) \text{ congruentes}$$

Multiplicando-se membro a membro (1) , (2) e (3)

$$\frac{P(a,\ b,\ c)}{P(a,\ b,\ 1)} \cdot \frac{P(a,\ b,\ 1)}{P(a,\ 1,\ 1)} \cdot \frac{P(a,\ 1,\ 1)}{P(1,\ 1,\ 1)} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} \cdot \frac{c}{1} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{P(a,\ b,\ c)}{P(1,\ 1,\ 1)} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} \cdot \frac{c}{1} \Longrightarrow V = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} \cdot \frac{c}{1} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow V =$ (medida de a)$\cdot$(medida de b)$\cdot$(medida de c)

que será representada simplesmente por

$$\boxed{V = a \cdot b \cdot c}$$

onde a, b e c são as *medidas* das dimensões do paralelepípedo retângulo na unidade escolhida.

99• VOLUME DO PRISMA

Pela definição, o volume de um prisma é o volume do paralelepípedo retângulo a êle equivalente. Como êste paralelepípedo tem mesma altura e base equivalente à do prisma vem:

V = Volume do prisma = Volume do paralelepípedo retângulo equivalente $\Rightarrow V = \underbrace{a \cdot b}_{B} \cdot \underset{h}{c} \Rightarrow \boxed{V = B \cdot h}$

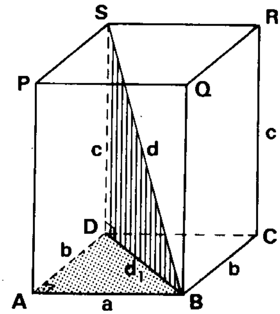
onde B é a área da base e h é a medida da altura do prisma.

OBSERVAÇÃO: Demonstra-se também, que o volume de um prisma é:

$$\boxed{\textbf{Volume} = \textbf{(Área da secção reta)} \cdot \textbf{(medida da aresta lateral)}}$$

VI. PARTE PRÁTICA.

100• PARALELEPÍPEDO RETÂNGULO



Seja um paralelepípedo retângulo de dimensões a, b e c.

1) *Cálculo da diagonal*

Sendo d a medida da diagonal e d_1 a medida da diagonal da face ABCD temos:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta ABD \Rightarrow d_1^2 = a^2 + b^2 \\ \Delta BDS \Rightarrow d^2 = d_1^2 + c^2 \end{array}\right\} \Rightarrow d^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

2) *Área total*

A área total é a área da superfície total, isto é, 6 retângulos, 2 de dimensões a e b, 2 de dimensões a e c e 2 de dimensões b e c. Então:

$$\boxed{S = 2\,(ab + ac + bc)}$$

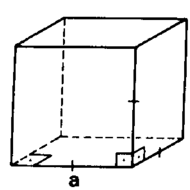
3) *Volume*

Conforme foi deduzido

$$\boxed{V = a \cdot b \cdot c}$$

101• CUBO

É caso particular de paralelepípedo retângulo em que $a = b = c$. Seja um cubo de aresta a



1) diagonal: $\boxed{d = a\sqrt{3}}$

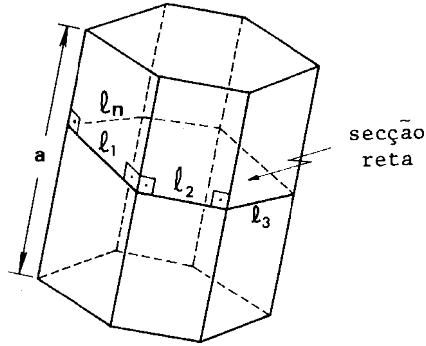
2) Área total: $\boxed{S = 6\,a^2}$

3) Volume: $\boxed{V = a^3}$

102• PRISMA

1) *Área lateral*

Seja um prisma de aresta lateral medindo $\underline{a}$ e ℓ_1, ℓ_2, ... ℓ_n as medidas dos lados de uma secção reta



Área lateral = A_L = soma das áreas das faces laterais.

Cada face lateral é um paralelogramo de base $\underline{a}$ e altura igual a um lado da secção reta.

$$A_L = a\,\ell_1 + a\,\ell_2 + \dots + a\,\ell_n = \underbrace{(\ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_n)}_{2p}\cdot a \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{A_L = 2p \cdot a}$$

2p = medida do perímetro da secção reta

a = medida da aresta lateral.

2) *Área total*

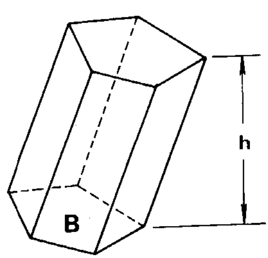
$$A_T = A_L + 2B \Longrightarrow \boxed{A_T = 2pa + 2B}$$

B = área da base

3) *Volume*

Conforme já foi deduzido

$$\boxed{V = B \cdot h}$$



B = área da base

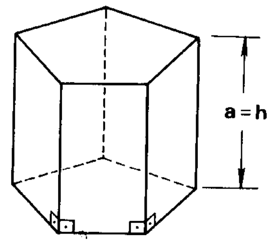
h = medida da altura

103• PRISMA RETO

No prisma reto temos:

aresta lateral = altura $\Rightarrow$ $a = h$

e a base é secção reta.



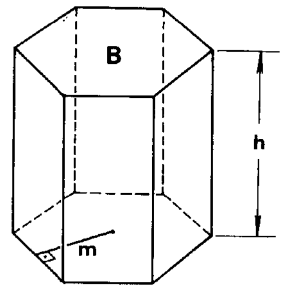
$A_L = 2p \cdot a = 2p \cdot h$

$A_T = A_L + 2B = 2p \cdot a + 2B = 2p \cdot h + 2B$

$V = B \cdot h$

104• PRISMA REGULAR

É um prisma reto e a base é uma região poligonal regular.



B = área da base = $p \cdot m$

p = medida do semi-perímetro da base

m = medida do apótema da base

$\boxed{A_L = 2\,ph}$ $\qquad A_T = A_L + 2B = 2ph + 2pm \qquad$ $\boxed{A_T = 2p(h + m)}$

$V = B \cdot h \Rightarrow \boxed{V = pmh}$

VII. PROBLEMAS RESOLVIDOS.

R.29 As dimensões x, y e z de um paralelepípedo retângulo são proporcionais à a, b e c. Dada a área S, calcular essas dimensões.

SOLUÇÃO

$x = a \cdot k \qquad y = b \cdot k \qquad z = c \cdot k \qquad (1)$

$2(xy + xz + yz) = S \qquad (2)$

(1) em (2): $2k^2(ab + ac + bc) = S \Rightarrow k = \dfrac{\sqrt{S}}{\sqrt{2(ab + ac + bc)}}$

Substituindo em (1) vem a resposta:

$$x = \frac{a\sqrt{S}}{\sqrt{2(ab + ac + bc)}} \ ; \quad y = \frac{b\sqrt{S}}{\sqrt{2(ab + ac + bc)}} \ ; \quad z = \frac{c\sqrt{S}}{\sqrt{2(ab + ac + bc)}}$$

R.30 As dimensões de um ortoedro são inversamente proporcionais à r, s e t. Calcular essas dimensões dada a diagonal d .

SOLUÇÃO

Sejam x, y e z as dimensões

$$x^2 + y^2 + z^2 = d^2 \quad (1)$$

$$x = \frac{1}{r} k \qquad y = \frac{1}{s} k \qquad z = \frac{1}{t} k \implies$$

$$\implies x = \frac{st}{rst} k \qquad y = \frac{rt}{rst} k \qquad z = \frac{rs}{rst} k$$

Mudando a constante para $K = \dfrac{k}{r\,s\,t}$ vem:

$$x = stK \qquad y = rtK \qquad z = rsK \quad (2)$$

(2) em (1): $K^2(s^2t^2 + r^2t^2 + r^2s^2) = d^2 \implies$

$$\implies K = \frac{d}{\sqrt{s^2t^2 + r^2t^2 + r^2s^2}}$$

Substituindo em (2), vem a resposta:

$$x = \frac{s\,t\,d}{\sqrt{s^2t^2 + r^2t^2 + r^2s^2}} \; ; \qquad y = \frac{r\,t\,d}{\sqrt{s^2t^2 + r^2t^2 + r^2s^2}}$$

$$z = \frac{r\,s\,d}{\sqrt{s^2t^2 + r^2t^2 + r^2s^2}}$$

R.31 A diagonal de um paralelepípedo reto-retângulo mede 17 cm. A soma das três dimensões é 29 cm e a área de uma face é 72 cm^2. Calcular as dimensões, a área total e o volume do paralelepípedo.

SOLUÇÃO

1º) Sendo x, y e z as dimensões temos:

$$x + y + z = 29 \quad (1) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 289 \quad (2) \qquad xy = 72 \quad (3)$$

As equações acima formam um sistema que resolve o problema. Quadrando (1) e em seguida entrando com (2) e (3), vem:

$$(x + y + z)^2 = 29^2 \implies \underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{289} + 2(\underset{\downarrow\atop 72}{xy} + xz + yz) = 841 \implies$$

$\Rightarrow\ xz + yz = 204 \Rightarrow (x + y)\, z = 204$ ④

De ① vem: $x + y = 29 - z$. Substituindo em ④

$(29 - z)z = 204 \Rightarrow z^2 - 29z - 204 = 0 \Rightarrow z = 12$ ou $z = 17$

com $z = 12$ em ① e considerando ③:

$$\begin{cases} x + y = 17 \\ x\,y = 72 \end{cases} \Longrightarrow x = 8 \text{ e } y = 9$$

com $z = 17$, o sistema em x e y é impossível.

As dimensões são: $x = 8$, $y = 9$ e $z = 12$.

2º) Área total

$S = 2(xy + xz + yz) = 2(8\cdot 9 + 8\cdot 12 + 9\cdot 12) = 276$

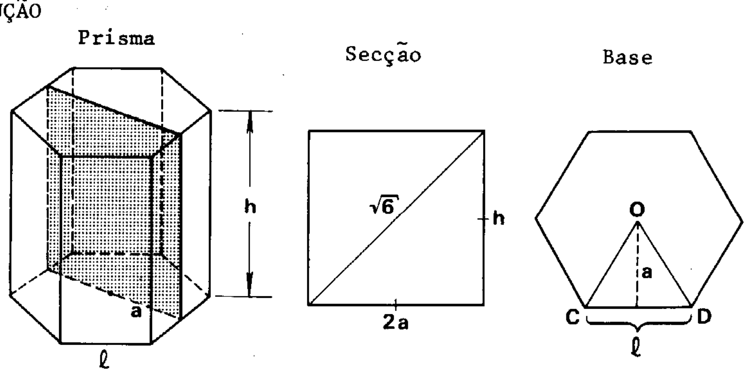
3º) Volume

$V = x.y.z = 8\cdot 9\cdot 12 = 864$

RESPOSTA: dimensões 8 cm, 9 cm e 12 cm.
área total = 276 cm^2 ; volume = 864 cm^3.

32 Um prisma regular hexagonal é cortado por um plano perpendicular a uma aresta de uma base, segundo um quadrado de diagonal $\sqrt{6}$ m. Calcular a área da base, a área lateral, a área total e o volume do prisma.

SOLUÇÃO



Cálculo dos elementos (indicados na figura)

Do quadrado vem: $2a = h = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} \Rightarrow h = \sqrt{3}$ e $a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Do triângulo equilátero OCD vem: $\frac{\ell\sqrt{3}}{2} = a \Rightarrow \ell = 1$

1º) Área da base: B

$$B = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ell a \Rightarrow B = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow B = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

2º) Área lateral: A_L

$$A_L = 6 \cdot \ell h \Longrightarrow A_L = 6 \cdot 1 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow A_L = 6\sqrt{3}$$

3º) Área total: A_T

$$A_T = A_L + 2B \Longrightarrow A_T = 6\sqrt{3} + 2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \qquad A_T = 9\sqrt{3}$$

4º) Volume:

$$V = B \cdot h \Rightarrow V = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} \Rightarrow V = \frac{9}{2}$$

RESPOSTA: $B = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ m², $A_L = 6\sqrt{3}$ m², $A_T = 9\sqrt{3}$ m² e

$V = \frac{9}{2}$ m³

R.33 Calcular o volume de um prisma triangular cuja base tem os lados medindo 5 cm, 7 cm e 8 cm, uma aresta lateral mede 17 cm e a sua projeção ortogonal sôbre o plano da base é o maior lado da base.

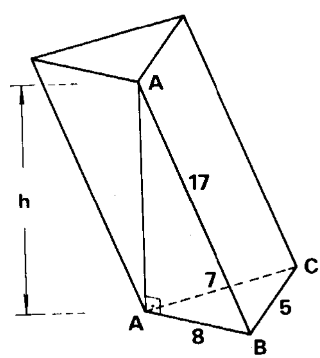
SOLUÇÃO

1º) Área da Base: B

$$B = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

com $a = 5$, $b = 7$ e $c = 8$

vem: $B = 10\sqrt{3}$



2º) Altura: h

Do triângulo A'AB $\Rightarrow$

$\Longrightarrow h^2 = 17^2 - 8^2 \Rightarrow h = 15$

3º) Volume:

$$V = B \cdot h \Longrightarrow V = 10\sqrt{3} \cdot 15 \Longrightarrow V = 150\sqrt{3}$$

RESPOSTA: $150\sqrt{3}$ cm³

R.34 Calcular as medidas x e y das arestas de dois cubos conhecendo-se a soma $x + y = \ell$ (ℓ dado) e a soma dos volumes v^3 (v é dado). Discutir.

SOLUÇÃO

$$\begin{cases} x + y = \ell \quad (1) \\ x^3 + y^3 = v^3 \Longrightarrow (x + y)(x^2 - xy + y^2) = v^3 \Longrightarrow \end{cases}$$

$$\Longrightarrow x^2 - xy + y^2 = \frac{v^3}{\ell} \quad (2)$$

$$(1) \Longrightarrow (x + y)^2 = \ell^2 \Longrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = \ell^2 \quad (3)$$

Fazendo (3) - (2) : $xy = \dfrac{\ell^3 - v^3}{3\ell}$ (4)

Sabendo a soma e o produto de x e y, dadas por (1) e (4), montamos uma equação do 2º grau ($z^2 - Sz + P = 0$) cujas raízes serão x e y.

$$z^2 - \ell z + \frac{\ell^3 - v^3}{3\ell} = 0 \Longrightarrow 3\ell z^2 - 3\ell^2 z + \ell^3 - v^3 = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow z = \frac{3\ell^2 \pm \sqrt{3\ell(4v^3 - \ell^3)}}{6\ell} \Longrightarrow x = \frac{3\ell^2 + \sqrt{3\ell(4v^3 - \ell^3)}}{6\ell}$$

$$\text{e} \quad y = \frac{3\ell^2 - \sqrt{3\ell(4v^3 - \ell^3)}}{6\ell}$$

DISCUSSÃO:

Basta impor: discrimintante ≥ 0

$$3\ell(4v^3 - \ell^3) \geq 0 \Longrightarrow 4v^3 \geq \ell^3$$

VIII. PROBLEMAS PROPOSTOS.

P.59 Calcular a diagonal, a área e o volume de um paralelepípedo retângulo, sabendo que suas dimensões são 3cm, 4cm e $4\sqrt{6}$ cm.

P.60 (EE MAUÁ - 62) A diagonal de um paralelepípedo mede $\sqrt{14}$ m. Calcular o volume do paralelepípedo, sabendo que as medidas das 3 arestas são números inteiros consecutivos.

P.61 As dimensões de um paralelepípedo retângulo são proporcionais aos números 3, 4 e 12. Calcular essas dimensões, a área e o volume, sabendo que a diagonal mede 260 cm.

P.62 As dimensões x, y e z de um paralelepípedo retângulo são proporcionais à a, b e c. Dada a diagonal $\underline{d}$, calcular essas dimensões.

P.63 As dimensões de um paralelepípedo retângulo são inversamente proporcionais aos números 6, 4 e 3. Determiná-las, sabendo que a área total dêste paralelepípedo é 208 m^2.

P.64 As áreas de três faces adjacentes de um ortoedro estão entre si como p, q e r. A área total é $2\ell^2$. Determinar as três dimensões.

P.65 (CESCEM - 71) Um paralelepípedo retângulo tem 142 cm^2 de superfície total e a soma dos comprimentos de suas arestas vale 60cm. Sabendo que os seus lados estão em progressão aritmética, êles valem (em cm):

a) 2, 5, 8;
b) 1, 5, 9;
c) 12, 20, 28;
d) 4, 6, 8;
e) 3, 5, 7.

P.66 As dimensões de um paralelepípedo retângulo são inversamente proporcionais a r, s, t. Calcular essas dimensões, sabendo que a área é S.

P.67 Calcular as dimensões de um paralelepípedo retângulo sabendo que estão em PG, dadas a sua soma 21 m e o volume do paralelepípedo é de 216 m^3.

P.68 Calcular as dimensões, a área e o volume de um ortoedro, sabendo que a diagonal mede $\sqrt{34,5}$ dm, a soma das medidas das arestas é de 40 dm e a área da base é 10 dm^2.

P.69 (FEIUC - 68) A soma das dimensões a, b, c de um paralelepípedo retângulo é $\underline{m}$ e a diagonal é $\underline{d}$. Tem-se para a área total S:

a) $S^2 = m^2 - d^2$;
b) $S = m^2 - d^2$;
c) $S = m^2 + d^2$;
d) $S = md$;
e) Nenhuma das respostas anteriores.

P.70 (FEIUC - 57) Calcular as arestas do paralelepípedo retângulo sabendo-se que sua soma é 17,5 cm, $V = 125$ cm^3 e que uma das arestas é média proporcional entre as outras duas.

P.71 Calcular as dimensões de um paralelepípedo retângulo, sabendo-se que a soma de duas delas é 25 m, o volume 900 m^3 e a área total, 600 m^2.

P.72 (CICE - 68) A soma dos quadrados das diagonais de um paralelepípedo é igual:

a) a soma dos produtos das arestas tomadas duas a duas;

b) a área lateral do paralelepípedo;

c) a área total do paralelepípedo;

d) a soma das áreas das secções diagonais;

e) a soma dos quadrados das arestas.

P.73 Num prisma reto de base quadrada a soma das doze arestas é 44m e a área total é 78 m^2. Determinar as arestas, a diagonal e o volume.

P.74 A área total de um paralelepípedo reto-retângulo é 720 cm^2; determinar suas dimensões sabendo que sua soma vale 34 cm e que a diagonal de uma das faces vale 20 cm.

P.75 Calcular as dimensões de um ortoedro cuja diagonal mede 13 cm, de área total 192 cm^2 e sabendo que a área da secção, por um plano, por duas arestas opostas é 60 cm^2.

P.76 Determinar as dimensões de um paralelepípedo retângulo, dada a sua soma 43 a, a diagonal 25 a e a área de uma face 180 a^2.

P.77 Calcular o volume de um paralelepípedo retângulo conhecendo-se sua diagonal 13 m, sua área total 192 m^2 e sabendo que a largura excede de 5m a soma do comprimento com a altura.

P.78 Calcular as arestas de um prisma regular de base triangular, cuja altura é igual ao lado da base e cujo volume é $32\sqrt{3}$ m^3. Calcular também as áreas lateral e total.

P.79 (FAUUSP - 63) Qual deve ser a altura de um prisma reto cuja base é triângulo equilátero de lado $\underline{a}$ para que seu volume seja igual ao volume de um cubo de aresta $\underline{a}$? Calcular, então a superfície total do prisma.

P.80 (FAUUSP - 69) Determinar o volume e a área lateral de um prisma reto de 10 cm de altura e cuja base é um hexágono regular de apótema $3\sqrt{3}$ cm.

P.81 A aresta lateral de um prisma tem 7 cm e uma das diagonais da secção reta, que é um losango, tem 6 cm. Sabendo que a área lateral mede 140 cm^2, calcular a outra diagonal da secção reta.

P.82 Calcular o volume de um prisma triangular cuja base é um triângulo equilátero de lado $\underline{2a}$, uma aresta lateral mede $\underline{39a}$ e sua projeção ortogonal sôbre o plano da base mede $\underline{15a}$.

P.83 (FEIUC - 55) As bases de um paralelepípedo oblíquo cuja aresta lateral mede 10 cm são retângulos de lados iguais de 5 cm e 12 cm. A projeção ortogonal de um vértice de base superior sôbre o plano da base inferior coincide com o centro desta base. Calcular o volume do sólido.

P.84 Determinar a área lateral e o volume de um prisma reto de altura $\underline{h}$, cuja base é um hexágono regular inscrito em um círculo de raio R.

P.85 Determinar o lado da base e a altura de um prisma hexagonal regular, dadas a área lateral S e o volume V.

P.86 Determinar o perímetro da base e a altura de um prisma reto pentagonal dadas a sua área lateral $\underline{S}$ e a soma $\underline{a}$ das 15 arestas.

P.87 Calcular a aresta de um cubo, sabendo-se que, aumentada de $\underline{k}$ metros, o volume aumenta de V metros cúbidos. Discutir.

P.88 Calcular as dimensões de um paralelepípedo retângulo, sabendo que estão em progressão aritmética, a área total é S e a diagonal é $\underline{d}$. Discutir.

P.89 Em um paralelepípedo retângulo a soma dos quadrados das diagonais é igual à soma dos quadrados das doze arestas.

P.90 Dois paralelepípedos retângulos têm diagonais iguais, e a soma das 3 dimensões de um é igual à soma das três do outro. Provar que as áreas totais de ambos são iguais.

P.91 Dois prismas retos têm por bases polígonos regulares de $\underline{n}$ lados, de apótemas $\underline{a}$ e $\underline{a}'$ e têm por alturas $\underline{h}$ e $\underline{h}'$; demonstrar que se a razão de suas áreas totais é igual à razão de seus volumes, tem-se a relação:

$$\frac{1}{h} - \frac{1}{h'} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a'}$$

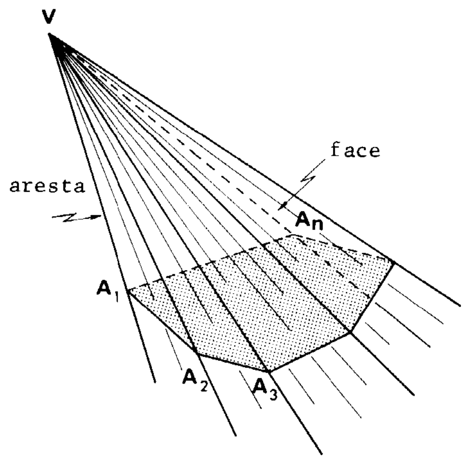
CAPÍTULO V

PIRÂMIDE

I. PIRÂMIDE ILIMITADA.

105• DEFINIÇÃO

Consideremos uma região poligonal plana convexa $A_1\ A_2\ \ldots\ A_n$ de n lados e um ponto V fora de seu plano. Chama-se pirâmide ilimitada convexa, ou pirâmide convexa indefinida (ou ângulo poliédrico ou ângulo sólido) à reunião das semi-retas de origem em V e que passam pelos pontos da região poligonal dada.



106• ELEMENTOS

Uma pirâmide ilimitada convexa possui: n arestas, n diedros e n faces (que são ângulos ou setores angulares planos).

107• SECÇÃO

É uma região poligonal plana com um só vértice em cada aresta.

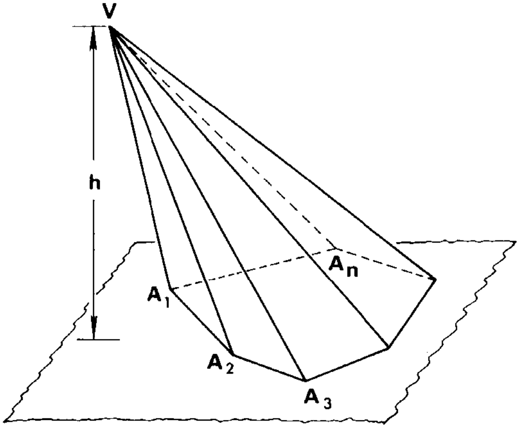
108• SUPERFÍCIE

A superfície de uma pirâmide ilimitada convexa é a reunião das faces desta pirâmide. É uma superfície poliédrica convexa ilimitada.

II. PIRÂMIDE.

109• DEFINIÇÃO

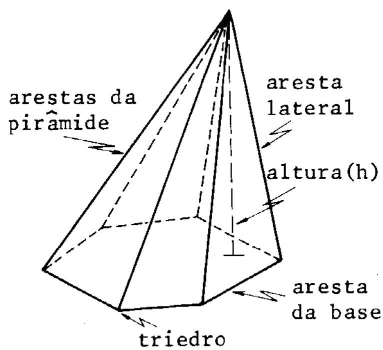
Pirâmide convexa limitada ou *pirâmide convexa definida* ou *pirâmide convexa* é a parte da pirâmide ilimitada que contém o vértice quando se divide esta pirâmide pelo plano de uma secção, reunida com esta secção.



110• ELEMENTOS

Uma pirâmide possui:

1 base (a secção acima citada), n faces laterais (triângulos) n+ 1 faces, n arestas laterais, 2n arestas, 2n diedros, n + 1 vértices, n+ 1 ângulos poliédricos e n triedros.



111• ALTURA

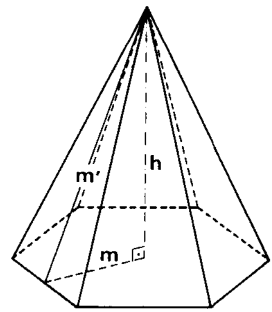
É a distância entre o vértice e o *plano* da base.

112• SUPERFÍCIE

Superfície lateral: É reunião das faces laterais.

Superfície total: É a reunião da superfície lateral com a base.

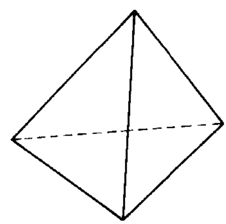
113• PIRÂMIDE REGULAR



É uma pirâmide cuja base é um polígono regular e a projeção ortogonal do vértice sôbre o plano da base é o centro da base.

114• APÓTEMA DE UMA PIRÂMIDE REGULAR

É o segmento cujas extremidades são: o vértice e o ponto médio de um dos lados da base, isto é, m'.



115• TETRAEDRO

É a pirâmide triangular.

TETRAEDRO REGULAR

É o tetraedro que possui as seis arestas congruentes entre si.

NOTA: É comum se encontrar enunciados de problemas sôbre pirâmides referindo-se a *pirâmide reta*. Deve-se entender como tal uma pirâmide cuja projeção ortogonal do vértice sôbre o plano da base é o centro da base. Caso a base seja um polígono circunscritível êste centro é o incentro (centro da circunferência inscrita na base).

III. EQUIVALÊNCIA ENTRE PIRÂMIDES.

116• DEFINIÇÃO

O conceito de equivalência entre sólidos até aqui usado e definido, equivalência por equidecomposição, permitiu determinar o volume do prisma e de qualquer outro tipo de sólido que seja soma ou diferença de prismas.

Porém êste conceito é *insuficiente* para o estudo das pirâmides e de sólidos em geral. M. Dehm em 1901, demonstrou que existe a "impossibilidade de se decompor em geral dois poliedros de igual volume em partes superporníveis".

Estenderemos o conceito de equivalência entre sólidos para o que segue:

117• Equivalência é uma *relação* entre sólidos que obedece aos seguintes postulados:

PE - 1 Reflexiva: $S \approx S$

PE - 2 Simétrica: $S_1 \approx S_2 \iff S_2 \approx S_1$

PE - 3 Transitiva: $\left.\begin{array}{l} S_1 \approx S_2 \\ S_2 \approx S_3 \end{array}\right\} \implies S_1 \approx S_3$

PE - 4 Uniforme

"Somas de sólidos dois a dois equivalentes são sólidos equivalentes."

PE - 5 Disjuntiva - Postulado de De Zolt

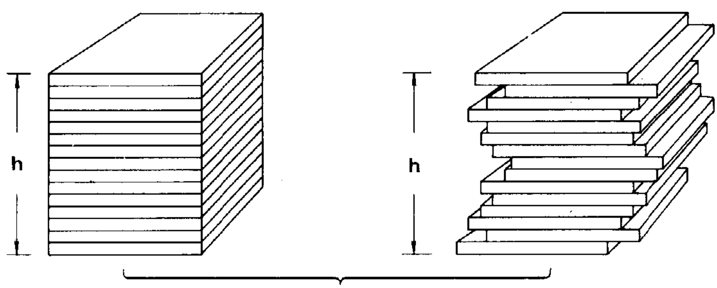
Um sólido não é equivalente a uma sua parte.

PE - 6 Postulado de *CAVALIERI*

"Dois sólidos nos quais QUALQUER plano secante, paralelo a um dado plano, determina superfícies equivalentes são sólidos equivalentes."

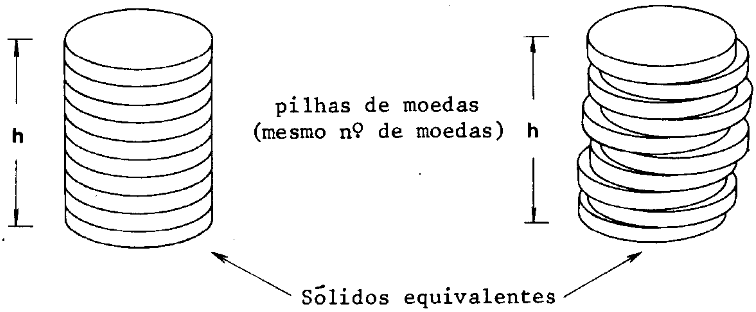
EXEMPLOS

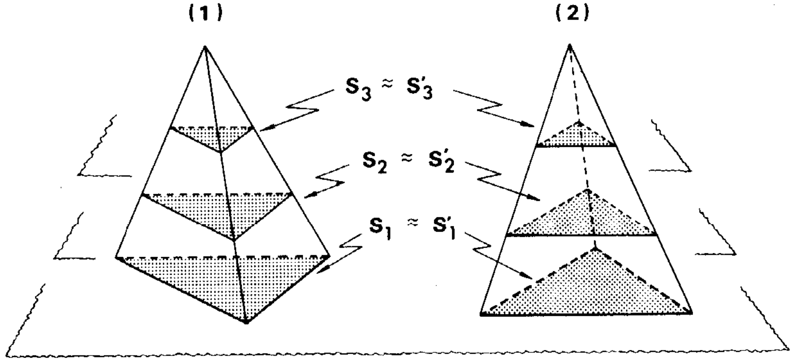
A aplicação do Postulado de Cavalieri - ou Princípio de Cavalieri -, em geral, implica na colocação dos sólidos com bases num mesmo plano, paralelo ao qual estão as superfícies equivalentes. Êste princípio é bem intuitivo, como veremos abaixo.



pilhas de fôlhas ou de livros

As duas "pilhas" estão determinando sólidos equivalentes (de igual volume).





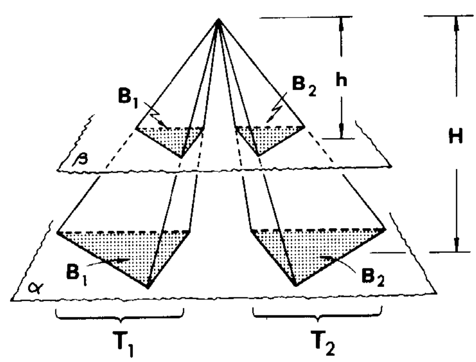
Sendo as superfícies equivalentes (de igual área), os sólidos (1) e (2) são equivalentes.

118• TEOREMA

"Dois tetraedros de bases equivalentes e alturas congruentes, são equivalentes".

$$H \begin{cases} B_1 \text{ e } B_2 \text{ áreas das bases} \\ B_1 = B_2 \\ H_1 = H_2 = H \end{cases}$$

$$T \;\{\; T_1 \approx T_2$$



DEMONSTRAÇÃO

Podemos supor (sem perda de generalidade) que as bases equivalentes estão num mesmo plano α e que os vértices coincidem.

Considerando qualquer plano secante β, paralelo a α, distando h do vértice e determinando secções de áreas B_1' e B_2' respectivamente:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{B_1'}{B_1} = \left(\dfrac{h}{H}\right)^2 \\[2ex] \dfrac{B_2'}{B_2} = \left(\dfrac{h}{H}\right)^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{B_1'}{B_1} = \frac{B_2'}{B_2} \qquad \text{e como } B_1 = B_2, \text{ vem } \quad B_1' = B_2'$$

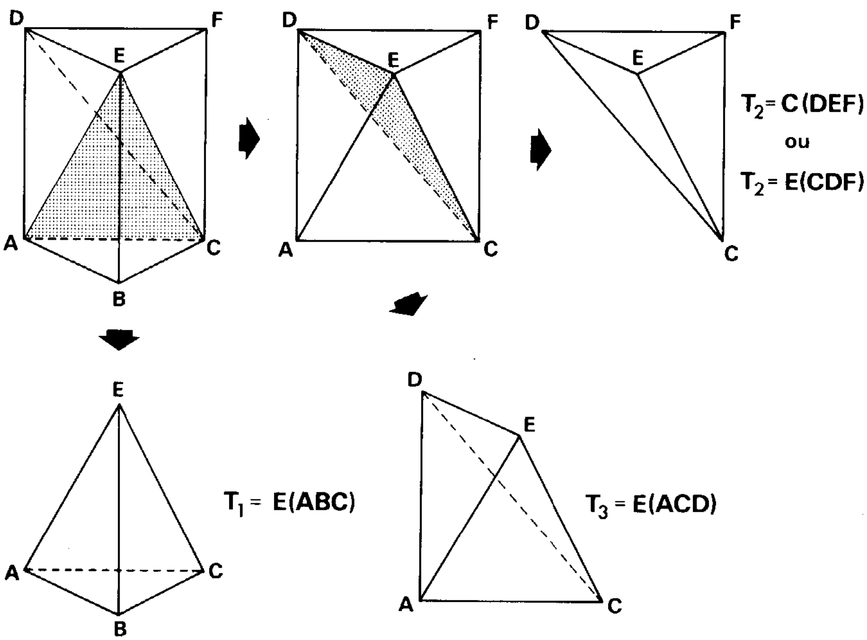
Se $B_1' = B_2'$, pelo Princípio de Cavalieri, os sólidos T_1 e T_2 são equivalentes.

IV. VOLUME DA PIRÂMIDE.

119• TEOREMA

"Todo prisma triangular é soma de três pirâmides triangulares (tetraedros) equivalentes entre si".

DEMONSTRAÇÃO.



Seja o prisma triangular ABCDEF.

Cortando este prisma pelo plano ACE, obtemos:

o tetraedro T_1 = E(ABC) e a pirâmide quadrangular E(ACFD).

Cortando esta pirâmide pelo plano CDE, obtemos:

os tetraedros T_2 = C(DEF) [ou E(CDF)] e T_3 = E(ACD)

Prisma triangular ABCDEF = $T_1 + T_2 + T_3$ (1)

$T_1 \approx T_2$ bases equivalentes - ABC e DEF - e mesma altura (a do prisma).

$T_2 \approx T_3$ bases equivalentes - CDF e ACD - e mesma altura (distância de E ao plano ACFD).

Logo, $T_1 \approx T_2 \approx T_3$ (2)

(1) e (2) demonstram a tese.

120• VOLUME DO TETRAEDRO.

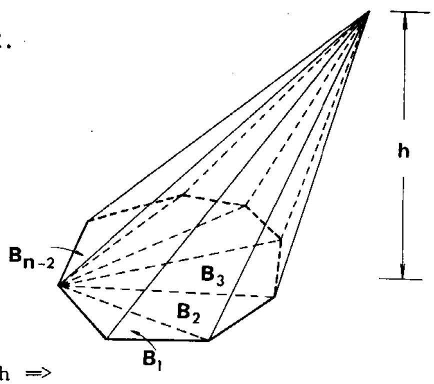
Seja B a área da base e h é a medida da altura do prisma do item anterior. Notemos que B é a área da base e h é a medida da altura do tetraedro T_1.

Em vista do teorema anterior

$V_{T_1} + V_{T_2} + V_{T_3} = V_{Prisma} \Rightarrow 3\,V_T = B \cdot h \Rightarrow$ $\boxed{V_T = \frac{1}{3}\, B \cdot h}$

121• VOLUME DE UMA PIRÂMIDE QUALQUER.

Seja B a área da base e h a medida da altura de uma pirâmide qualquer. Esta pirâmide é soma de (n-2) tetraedros.



$V = V_{T_1} + V_{T_2} + \ldots + V_{T_{n-2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\, B_1 h + \frac{1}{3}\, B_2 h + \ldots + \frac{1}{3}\, B_{n-2}\, h \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\,(B_1 + B_2 + \ldots + B_{n-2})\, h \Rightarrow$ $\boxed{V = \frac{1}{3}\, B \cdot h}$

V. PARTE PRÁTICA.

122• PIRÂMIDE QUALQUER

Área lateral: A_L = soma das áreas das faces laterais.

Área total: $A_T = A_L + B$ B = área da base

Volume: $V = \frac{1}{3} B \cdot h$ h = medida da altura

123• PIRÂMIDE REGULAR

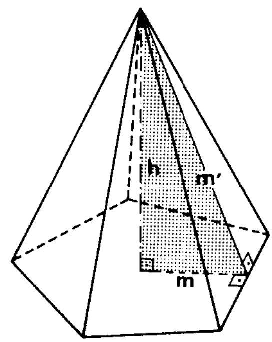
Sendo:

2p = medida do perímetro da base

m = medida do apótema da base

m' = medida do apótema da pirâmide,

temos:



Área lateral: $A_L = nA_\Delta = \overset{2p}{\overbrace{n \cdot \frac{1}{2} \ell}} m' \Longrightarrow$ $\boxed{A_L = pm'}$

Área total: $A_T = A_L + B \Longrightarrow A_T = pm' + pm \Longrightarrow$ $\boxed{A_T = p(m + m')}$

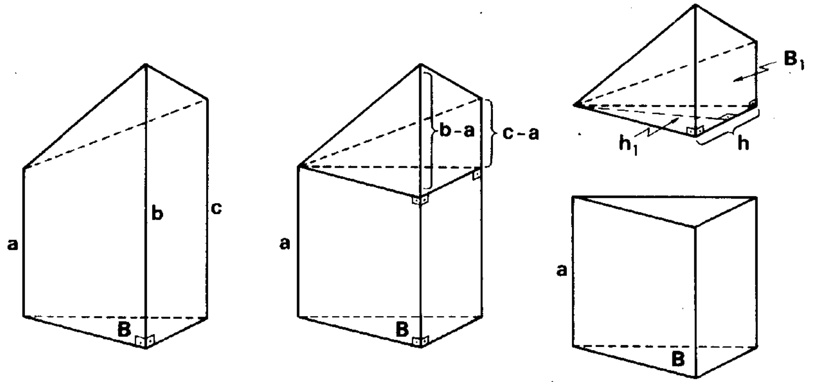
Volume: $V = \frac{1}{3} B \cdot h \Longrightarrow$ $\boxed{V = \frac{1}{3} pm \cdot h}$

Relação: $m'^2 = h^2 + m^2$

124• TRONCO DE PRISMA TRIANGULAR

1º) *Uma base de tronco é perpendicular às arestas.*

Seja B a área desta base e a, b e c as medidas das arestas laterais.



$$\text{Volume do tronco} = V_{\text{prisma}} + V_{\text{pirâmide}} \Longrightarrow V = B \cdot a + \frac{1}{3} B_1 h_1$$

$$B_1 = \text{área do trapézio} = \frac{c - a + b - a}{2}\, h$$

$$V = B \cdot a + \frac{1}{3}(b + c - 2a)\frac{h \cdot h_1}{2}$$

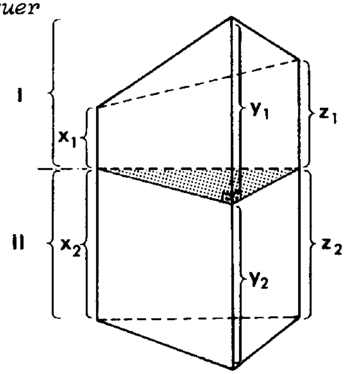
Mas $\dfrac{h \cdot h_1}{2} = B$, então

$$V = B \cdot a + \frac{1}{3}(b + c - 2a)\, B \Longrightarrow \boxed{V = B\left(\frac{a+b+c}{3}\right)}$$

2º) *Tronco de prisma triangular qualquer*

O plano de uma secção reta (de área B) divide o tronco de prisma em dois do tipo considerado acima.

$$V = V_{I} + V_{II}$$



$$V = B \cdot \frac{x_1 + y_1 + z_1}{3} + B \cdot \frac{x_2 + y_2 + z_2}{3} \Longrightarrow \boxed{V = B\left(\frac{a+b+c}{3}\right)}$$

V = (área da secção reta)(média aritmética das arestas laterais).

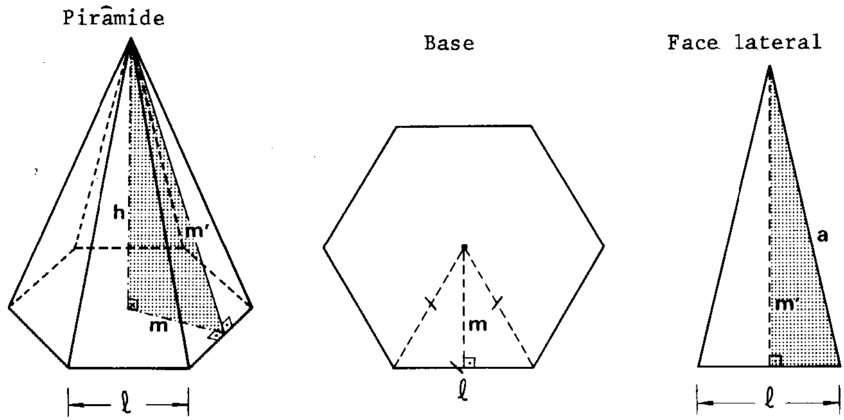
VI. PROBLEMAS RESOLVIDOS.

R.35 Uma pirâmide regular hexagonal de 12 cm de altura tem aresta da base medindo $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm. Calcular:

apótema da base (m), apótema da pirâmide (m'), aresta lateral (a), área da base (B), área lateral (A_L), área total (A_T) e volume (V).

SOLUÇÃO:

$$h = 12 \text{ cm} \qquad \ell = \frac{10\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$



Apótema da base: $m = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow m = \frac{10\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow m = 5 \text{ cm}$

Apótema da pirâmide: $m'^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow m'^2 = 12^2 + 5^2 \Longrightarrow$

$\Rightarrow m' = 13 \text{ cm}$

Aresta lateral: $a^2 = m'^2 \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow a^2 = 13^2 + \left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Longrightarrow$

$\Rightarrow a = \frac{2}{3}\sqrt{399} \text{ cm}$

Área da base: $B = 6 \cdot \frac{1}{2}\,\ell m \Longrightarrow B = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{10\sqrt{3}}{3} \cdot 5 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow B = 50\sqrt{3} \text{ cm}^2$

Área lateral: $A_L = 6 \cdot \frac{1}{2}\,\ell m' \Rightarrow A_L = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{10\sqrt{3}}{3} \cdot 13 \Longrightarrow$

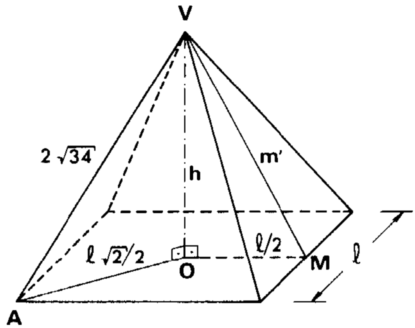
$\Rightarrow A_L = 130\sqrt{3} \text{ cm}^2$

Área total: $A_T = A_L + B = 130\sqrt{3} + 50\sqrt{3} \Rightarrow A_T = 180\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

Volume: $V = \frac{1}{3} B \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 50\sqrt{3} \cdot 12 \Rightarrow V = 200\sqrt{3}\ \text{cm}^3$

R.36 De uma pirâmide regular de base quadrada conhece-se a medida $2\sqrt{34}$ m das arestas laterais e a área lateral 240 m^2. Calcular o lado da base (ℓ), o apótema (m'), a altura e o volume da pirâmide.

SOLUÇÃO



$A_L = 240 \Rightarrow 4\,\frac{1}{2}\,\ell m' = 240 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ell m' = 120$ (1)

$\Delta VOA \Rightarrow h^2 + \left(\frac{\ell\sqrt{2}}{2}\right)^2 =$

$= (2\sqrt{34})^2 \Rightarrow 2h^2 + \ell^2 = 272$ (2)

$\Delta VOM \Rightarrow h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = m'^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4h^2 + \ell^2 = 4m'^2$ (3)

As equações (1), (2) e (3) formam um sistema que resolve o problema, como segue:

Substituindo m' de (1) em (3), vem:

$4h^2 + \ell^2 = 4\left(\frac{120}{\ell}\right)^2 \Rightarrow 4h^2\ell^2 + \ell^4 = 57600$ (4)

h^2 de (2) em (4):

$4\ell^2\left(\frac{272 - \ell^2}{2}\right) + \ell^4 = 57600 \Rightarrow \ell^4 - 544\ell^2 + 57600 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ell^2 = 144 \Rightarrow \ell = 12 \Rightarrow m' = 10 \Rightarrow h = 8 \\ \text{ou} \\ \ell^2 = 400 \Rightarrow \ell = 20 \Rightarrow m' = 6 \Rightarrow \text{não existe a pirâmide} \end{cases}$$

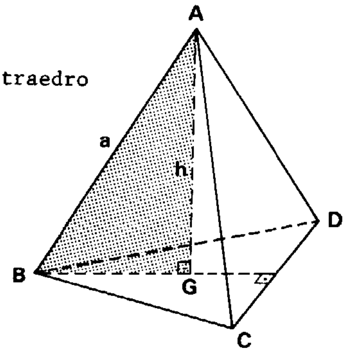
Volume: $V = \frac{1}{3} B \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 8 \Rightarrow V = 288$

RESPOSTA: $\ell = 12$m, $m' = 10$m, $h = 8$m e $V = 288\ m^3$

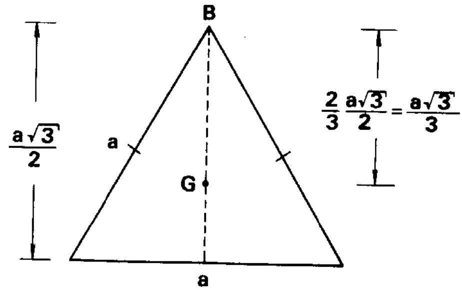
R.37 Calcular a área total e o volume de um tetraedro regular de aresta $\underline{a}$.

SOLUÇÃO

Tetraedro



Face (base)



1º) Área total: $A_T = 4 \cdot B \Rightarrow A_T = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A_T = a^2\sqrt{3}$

2º) Cálculo da altura do tetraedro regular de aresta a .

$$\Delta AGB \Rightarrow h^2 = a^2 - (BG)^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h^2 = \frac{6a^2}{9} \Rightarrow \boxed{h = \frac{a\sqrt{6}}{3}} \quad \text{ou ainda} \quad h = \frac{a\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{3}$$

Volume: $V = \frac{1}{3} B \cdot h$ onde $B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ e $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, então

$$V = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{a^2 \cdot \cancel{\sqrt{3}}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}\cdot\cancel{\sqrt{3}}}{3} \Rightarrow V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

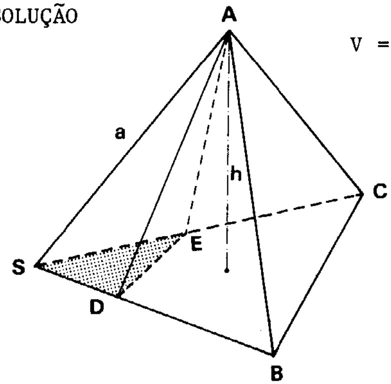
RESPOSTA: $A_T = a^2\sqrt{3}$ e $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

R.38 (FEIUC - 59) Um tetraedro regular SABC de aresta $\underline{a}$ é cortado por um plano que passa pelo vértice A e pelos pontos D e E situados respectivamente sôbre as arestas SB e SC; sabendo-se que

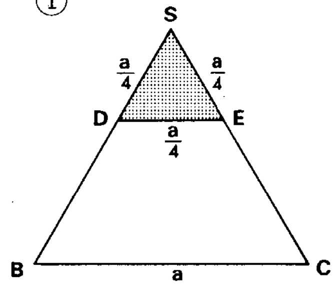
$$SD = SE = \frac{1}{4} SC$$

achar o volume da pirâmide ASDE.

SOLUÇÃO



$$V = \frac{1}{3}\,B \cdot h \qquad (1)$$



Área da base: $B = \frac{1}{2}\,(\frac{a}{4})\cdot(\frac{a}{4})\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \quad B = \frac{a^2\sqrt{3}}{64}$

Altura: A altura de ASDE é a distância entre A e o *plano* SDE, então h é igual à altura do tetraedro regular de aresta $\underline{a}$.

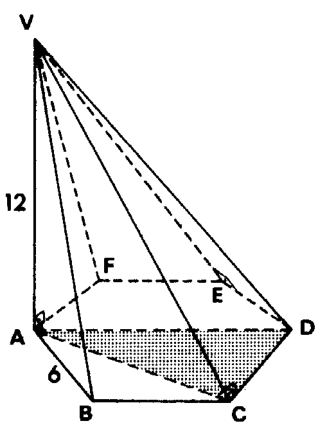
$$h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

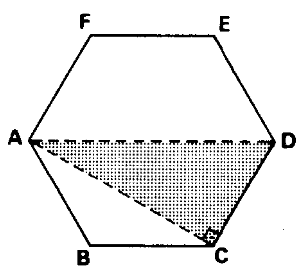
Substituindo B e h em (1) vem:

$$V = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{a^2\,\cancel{\sqrt{3}}}{64} \cdot \frac{a\,\sqrt{2}\cdot\cancel{\sqrt{3}}}{3} \Longrightarrow \quad V = \frac{a^3\sqrt{2}}{192}$$

R.39 (FEIUC - 55) A base de uma pirâmide de vértice V é um hexágono regular ABCDEF, sendo AB = 6 cm. A aresta lateral VA é perpendicular ao plano da base e igual ao segmento AD. Provar que quatro faces laterais são triângulos retângulos e achar as suas áreas.

SOLUÇÃO





a) Prova de que quatro faces laterais são triângulos retângulos.

$VA \perp pl(ABCDEF) \Longrightarrow \begin{cases} VA \perp AB \Longrightarrow \Delta VAB \text{ é retângulo em } A \\ VA \perp AF \Longrightarrow \Delta VAF \text{ é retângulo em } A \\ VA \perp CD \end{cases}$

C pertence à circunferência de diâmetro AD $\Longrightarrow AC \perp CD$

$\left.\begin{matrix} VA \perp CD \\ AC \perp CD \end{matrix}\right\} \Longrightarrow CD \perp pl(VAC) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \Delta VCD$ é retângulo em C

Analogamente ΔVED é retângulo em E.

b) Cálculo das áreas

1º) Os triângulos VAB e VAF têm área igual a $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12 = 36$ cm²

2º) Os triângulos VCD e VED têm áreas S iguais.

Cálculo de S

$S = \frac{1}{2}(CD)\cdot(VC) \Longrightarrow S = 3\cdot(VC)$ (1)

$\Delta ACD \Rightarrow (AC)^2 = 12^2 - 6^2 \Rightarrow (AC)^2 = 108$

$\Delta VAC \Rightarrow (VC)^2 = (VA)^2 + (AC)^2 \Rightarrow (VC)^2 = 252 \Rightarrow VC = 6\sqrt{7}$

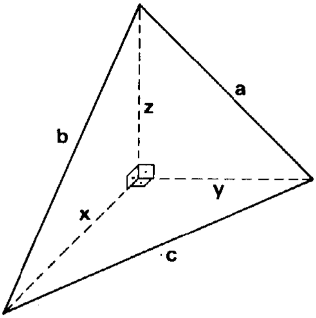
Substituindo em (1), vem:

$$S = 3 \cdot 6\sqrt{7} \Longrightarrow S = 18\sqrt{7} \text{ cm}^2$$

R.40 (EEUM - 59 - 2ª época) Calcular o volume de um tetraedro tri-retangular, conhecendo-se os lados a, b, c, da face oposta ao triedro tri-retangular.

SOLUÇÃO

Sejam x, y e z as medidas das arestas do triedro tri-retângulo. O tetraedro é uma pirâmide de altura z e base um triângulo retângulo de catetos x e y.



$V = \frac{1}{3} B\cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} xy \cdot z \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \frac{1}{6} xyz$ (a)

Cálculo de x, y e z:

$x^2 + y^2 = c^2$ (1) $\qquad x^2 + z^2 = b^2$ (2) $\qquad y^2 + z^2 = a^2$ (3)

$$(1) + (2) + (3) \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \qquad (4)$$

$$(4) - (1) \Rightarrow z^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \Rightarrow z = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}}$$

$$(4) - (2) \Rightarrow y^2 = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2}}$$

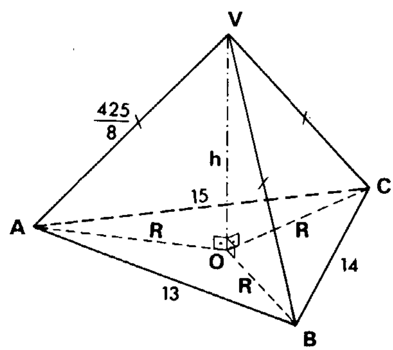
$$(4) - (1) \Rightarrow x^2 = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2}}$$

Substituindo em (a), vem:

$$V = \frac{1}{24}\sqrt{2(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}$$

R.41 Uma pirâmide triangular tem para base um triângulo de lados 13 a, 14 a e 15 a; as outras arestas medem $\frac{425}{8}$ a. Calcular o volume.

SOLUÇÃO



As arestas laterais sendo congruentes, a projeção ortogonal do vértice sôbre o plano da base é o circuncentro (centro da circunferência circunscrita) O do triângulo ABC. A altura é VO.

$$V = \frac{1}{3} B \cdot h \qquad (1)$$

Área da base:

$$\left.\begin{array}{l} B = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\ a = 13,\ b = 14,\ c = 15 \end{array}\right\} \Longrightarrow B = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} \Longrightarrow B = 84$$

Altura:

$$R = \frac{abc}{4S} \Longrightarrow R = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84} \Longrightarrow R = \frac{65}{8}$$

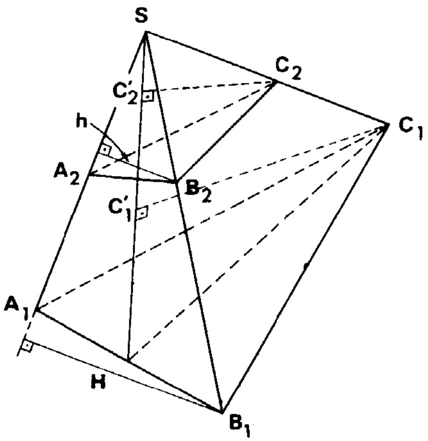
$$\Delta VOA \Rightarrow h^2 = (\frac{425}{8})^2 - (\frac{65}{8})^2 \Longrightarrow h = \frac{105}{2}$$

Substituindo-se em (1) , vem:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 84 \cdot \frac{105}{2} \Longrightarrow V = 1470$$

RESPOSTA: 1470 a^3

R.42 Se dois tetraedros têm um triedro comum seus volumes são proporcionais aos produtos das arestas dêsse triedro.



DEMONSTRAÇÃO

Sejam $S(A_1B_1C_1)$ e $S(A_2B_2C_2)$ os tetraedros com o triedro S comum.

C_1C_1' altura relativa à face SA_1B_1
C_2C_2' altura relativa à face SA_2B_2
H = altura de SA_1B_1 relativa a SA_1
h = altura de SA_2B_2 relativa a SA_2

$$\frac{\text{Volume } S(A_1B_1C_1)}{\text{Volume } S(A\ B\ C\ )} = \frac{\frac{1}{3}\ (\text{Área } SA_1B_1) \cdot C_1C_1'}{\frac{1}{3}\ (\text{Área } SA_2B_2) \cdot C\ C'} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{2}\ (SA_1) \cdot H \cdot C_1C_1'}{\frac{1}{2}\ (SA_2) \cdot h \cdot C_2C_2'} \Longrightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{SA_1}{SA_2} \cdot \frac{H}{h} \cdot \frac{C_1\ C_1'}{C_2\ C_2'}$$

Por semelhança de triângulo: $\frac{H}{h} = \frac{SB_1}{SB_2}$ e $\frac{C_1C_1'}{C_2C_2'} = \frac{SC_1}{SC_2}$

Substituindo $\frac{H}{h}$ e $\frac{C_1C_1'}{C_2C_2'}$ vem:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{SA_1}{SA_2} \cdot \frac{SB_1}{SB_2} \cdot \frac{SC_1}{SC_2}$$

VII. PROBLEMAS PROPOSTOS.

P.92 Uma pirâmide triangular regular tem as medidas da altura e da aresta da base igual a 6 cm. Calcular a área da base, a área lateral, a área total e o volume desta pirâmide.

P.93 Uma pirâmide regular de base quadrada tem lado da base medindo 6m e área lateral igual a $\frac{5}{8}$ da área total. Calcular a altura, a área lateral e o volume desta pirâmide.

P.94 (FFCLUSP - 57) Uma pirâmide tem por base um triângulo equilátero de lado $\underline{a}$. As faces laterais formam com o plano da base diedros de 60°. Calcular a altura, o comprimento das arestas e o volume da pirâmide.

P.95 (FEIUC - op. 63) Na pirâmide ABCDE a base é um retângulo de 6 m por 4 m. A aresta DE é a altura e mede 8 m. Prove que as quatro faces laterais são triângulos retângulos e calcule a área total da pirâmide.

P.96 (EEM - 68) Numa pirâmide OABC de base triangular (ABC), a reta OC é perpendicular ao plano OAB, sendo OC = a. Os três ângulos das faces do triedro de vértice C medem 60°. Calcular a área total da pirâmide e o seu volume.

P.97 Em um tetraedro que tem um triedro tri-retângulo, uma das arestas dêste triedro tem comprimento $\underline{a}$ e as outras duas $\underline{b}$. Determinar a área total de sua superfície e seu volume.

P.98 (EEMAUÁ - 68) Para medir a altura da torre vertical DE, toma-se no plano horizontal que passa pela sua base D, o segmento AB de comprimento 12 m e cujo ponto médio é C. Mede-se então os ângulos $D\hat{A}E$, $D\hat{B}C$ e $D\hat{C}E$, verificando-se que

$$D\hat{A}E = D\hat{B}E = 45^\circ$$

$$D\hat{C}E = 60^\circ$$

Determinar a altura da tôrre.

P.99 Calcular o volume de um tetraedro ABCD sendo dados: AB = CB = AC = = a, $A\hat{D}B$ e $B\hat{D}C$ retos e a distância $\underline{m}$ de D a AB.

P.100 (FEIUC - 56) Construir um tetraedro ABCD, sendo a face ABC um triângulo retângulo dado ($\hat{A} = 90°$) e AD = BD = CD = BC = a. Provar que o tetraedro tem um diedro reto. Achar o volume do tetraedro, sendo $A\hat{C}B = 60°$.

P.101 A sécção reta de um tronco do prisma triangular de volume V cm^3, tem área de B cm^2. Duas arestas laterais são a e b. Determinar a outra.

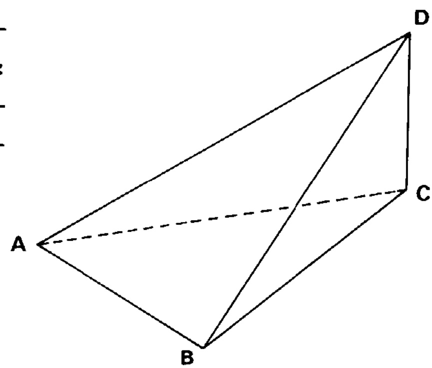
P.102 (EPUSP - 60) Sejam ABCD e ABCD' dois tetraedros, tais que os vértices D e D' pertencem a um plano paralelo ao plano ABC. Qual a razão dos volumes dêsses tetraedros?

P.103 (EPUSP - 60) As bases de duas pirâmides triangulares equivalentes de mesma altura são necessàriamente iguais?

P.104 (EEMAUÁ - 64) Na exploração de uma mina foi feito o corte indicado na figura ao lado. Para calcular o volume do minério extraído do corte, foram medidos: CD = $10\sqrt{3}$ metros, e que é perpendicular ao plano ABC e os ângulos:

$$A\hat{D}C = 60°$$
$$B\hat{D}C = 30°$$
$$A\hat{D}B = 60°$$

Calcular êsse volume.



P.105 É dada a altura h de uma pirâmide regular hexagonal. Determinar a aresta da base, sabendo que a área lateral é $\frac{16}{3}$ da de um triângulo equilátero de lado igual à altura dada. Calcular, então, o volume da pirâmide.

P.106 (EEM - 58) Provar que o plano bissetor do ângulo diedro de um tetraedro divide a aresta oposta em segmentos proporcionais às áreas das faces do diedro.

P.107 Todo plano conduzido por uma aresta de um tetraedro e pelo ponto médio da aresta oposta divide o tetraedro em duas partes equivalentes.

P.108 (EPUSP - 63) Num tetraedro de vértices A, B, C, D um dos triedros é tri-retângulo e AB = AC = AD. Mostre que a razão entre a área total de sua superfície e a área da face BCD é inferior a 3.

P.109 Sejam $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ as arestas do triedro tri-retângulo, de um tetraedro e $\underline{h}$ a altura relativa ao vértice dêsse triedro. Demonstrar que:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

P.110 Entre o volume V, a área lateral A, a área total S de uma pirâmide quadrangular regular existe a relação:

$$36\ V^2 = S(S - A)(2A - S)$$

P.111 O volume de uma pirâmide regular é igual ao produto da área lateral por $\frac{1}{3}$ da distância do centro da base a uma face lateral.

VIII. TESTES.

T.83 (EPUSP - 67) Cortando-se um prisma triangular por um plano contendo duas diagonais de faces laterais, obtêm-se duas pirâmides

a) iguais;
b) com volumes iguais;
c) com volumes na relação de 1 para 2;
d) com volumes na relação de 1 para 3;
e) nenhuma das respostas anteriores.

T.84 (FEIUC - 67) No tetraedro OABC, o triedro de vértice O é tri-retângulo. Sendo AB = 5, BC = 6 e AC = 7, a medida de OC é:

a) $\sqrt[3]{5 \cdot 6 \cdot 7}$
b) $2\sqrt{5}$
c) 5
d) 6,5
e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.85 (ITA - 69) Consideremos um tetraedro regular de aresta $\underline{a}$. Podemos calcular o volume V deste sólido, em função da aresta $\underline{a}$. Qual das afirmações abaixo é verdadeira?

a) $12\sqrt{2}\ V = 2a^3$;
b) $2\sqrt{2}\ V = 2a^3\sqrt{3}$;
c) $12\ V - \sqrt{2} = a^3\sqrt{2}$
d) $5\ V - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}\,a^3$;
e) as afirmações a, b, c e d são falsas.

T.86 (FEIUC - 68) Num tetraedro ABCD, a base ABC é um triângulo retângulo isósceles, com $\hat{A} = 90$, a face BCD é um triângulo equilátero de lado a, sendo o seu plano perpendicular ao da base. O volume do tetraedro vale:

a) $a^3\sqrt{2}$

b) $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$

c) $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

d) $3a^3$

e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.87 (FEIUC - 67) É dado um tetraedro ABCD. Os pontos M e N, pertencentes às arestas BD e CD, são tais que $\frac{DM}{BM} = \frac{DN}{CN} = \frac{1}{3}$. A razão entre os volumes dos tetraedros AMND e ABCD é:

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{9}$

d) $\frac{1}{16}$

e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.88 (EPUSP - 68) Uma semi-reta de origem no vértice de um triedro tri-retângulo forma com as três arestas do triedro um mesmo ângulo agudo, cujo coseno vale:

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.89 (EPUSP - 68) Um poliedro tem cinco faces: dois trapézios de base maior comum, dois triângulos equiláteros iguais, e um quadrado. As bases de cada trapézio medem k e 2k, o lado de cada triângulo e o lado do quadrado mede k. Então o volume do poliedro vale:

a) metade do volume de um tetraedro de aresta 2k;

b) $2\sqrt{2}\ k^3$

c) $\frac{k^3\sqrt{2}}{4}$

d) $\frac{k^3\sqrt{2}}{6}$

e) Nenhuma das respostas anteriores

T.90 (CICE - 70) Num tetraedro que tem um triedro, 0, tri-retângulo, as áreas das faces que se cortam em 0 são A, B e C. Então a área D da face oposta a 0 é tal que:

a) $D^2 = A^2 + B^2 + C^2 + AB + BC + CA$

b) $D^3 = A^3 + B^3 + C^3$

c) $D^2 = A^2 + B^2 + C^2$

d) $D = A + B + C$

e) Nada disso acontece.

T.91 (ITA - 71) Cortando-se um determinado prisma triangular, reto por um plano α que forma um ângulo de 45° com o plano da base ABC observamos que a reta r, intersecção de α com o plano da base, dista 7 cm de A, 5 cm de B e 2 cm de C. Se a área da base fôr 21 cm^2, o volume do tronco de prisma compreendido entre a base ABC e o plano α será:

a) 105 cm^3;

b) 294 cm^3;

c) 98 cm^3;

d) $98\sqrt{2}$ cm^3;

e) $\dfrac{98}{\sqrt{2}}$ cm^3.

T.92 (CESCEM - 71) Três segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ são perpendiculares dois a dois e têm o mesmo ponto médio M. Então o octaedro ABCDEF:

a) tem tôdas as faces iguais

b) tem tôdas as faces equiláteras

c) tem tôdas as faces retângulas

d) é regular

e) Nenhuma das respostas anteriores.

CAPÍTULO VI

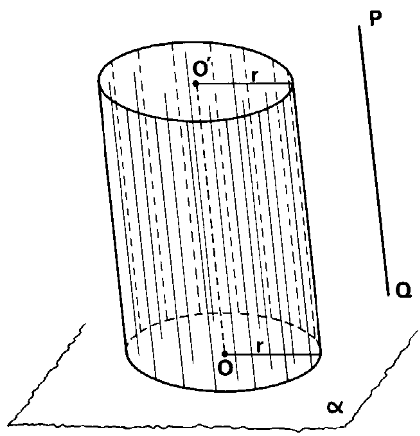
CILINDRO E CONE

I. CILINDRO.

I - A. DEFINIÇÕES.

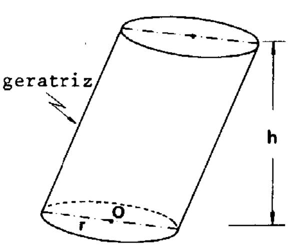
125• CILINDRO

Consideremos um círculo (região circular) de centro O e raio r situado num plano α, e um segmento de reta PQ, não nulo, não paralelo nem contido em α. Chama-se *cilindro circular* ou *cilindro* à reunião dos segmentos congruentes a PQ, com uma extremidade nos pontos do círculo e situados num mesmo semi- espaço dos determinados por α.

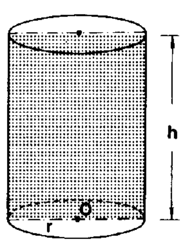


126• CLASSIFICAÇÃO

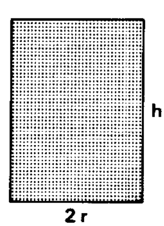
Se PQ é perpendicular a α, o cilindro é um *cilindro circular reto* (também chamado *cilindro de revolução*).
Se PQ é oblíquo a α, o cilindro é um *cilindro circular oblíquo*.



Cilindro oblíquo

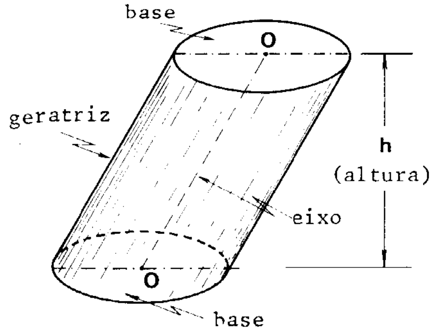


Cilindro reto



Secção meridiana

127• ELEMENTOS



O cilindro possui:

2 bases: círculos congruentes situados em planos paralelos.

geratrizes: são os segmentos com uma extremidade nos pontos da circunferência de centro O e raio r.

128• ALTURA

É a distância entre os planos das bases.

129• SECÇÃO MERIDIANA

É a intersecção do cilindro com um plano que contém a reta OO' determinada pelos centros das bases.

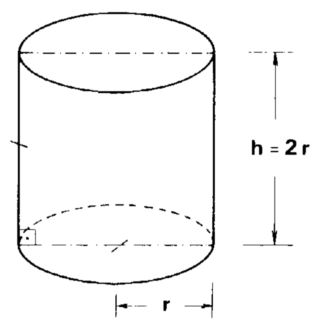
A secção meridiana de um cilindro oblíquo é um paralelogramo e a de um cilindro reto é um retângulo.

130• SUPERFÍCIES

Superfície lateral é a reunião das geratrizes.

Superfície total é a reunião da superfície lateral com as bases.

131• CILINDRO EQUILÁTERO



É um cilindro cuja secção meridiana é um quadrado, portanto apresenta

$$g = h = 2r$$

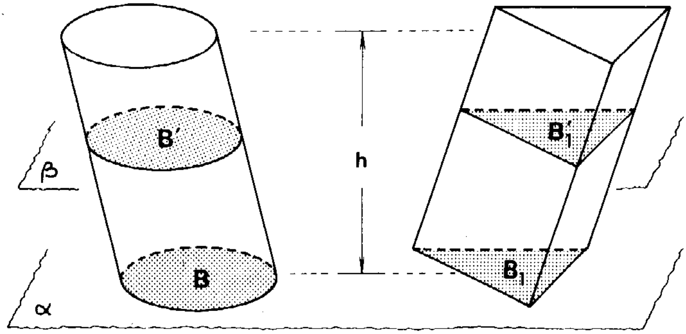
I-B. VOLUME.

132• TEOREMA

"Todo cilindro é equivalente a um prisma de base equivalente e altura congruente à do cilindro".

DEMONSTRAÇÃO

Dado um cilindro de área da base B e altura h, consideremos um prisma de mesma altura h e base equivalente à do cilindro, situada no mesmo plano α.



$$B = B_1, \quad B' = B, \quad B_1' = B_1 \implies B' = B_1'$$

Se β é um plano secante qualquer paralelo a α êle intercepta o cilindro e o prisma em superfícies equivalentes (áreas iguais às das bases). Então, pelo Princípio de Cavalieri, os dois sólidos são equivalentes.

133• VOLUME

Como conclusão do teorema acima temos:

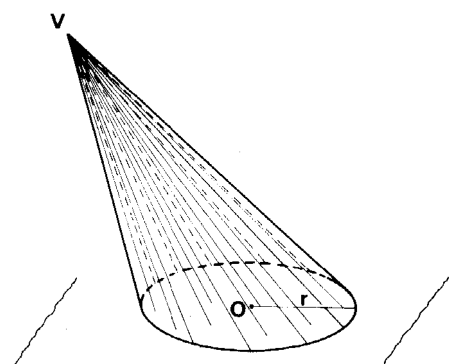
Volume do cilindro = Volume do prisma $\implies$ $V = B \cdot h$

como B = área da base do cilindro = πr^2, vem: $\boxed{V = \pi r^2 h}$

II. CONE.

II - A. DEFINIÇÕES.

134• CONE



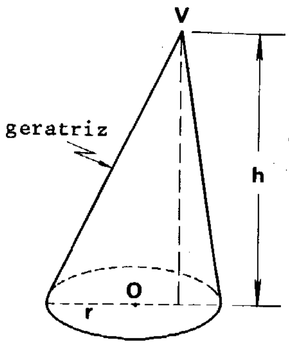
Consideramos um círculo (região circular) de centro O e raio r situado num plano α e um ponto V fora de α.

Chama-se *cone circular* ou *cone* à reunião dos segmentos com uma extremidade em V e a outra nos pontos do círculo.

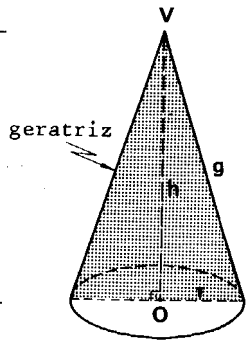
135• CLASSIFICAÇÃO

Se VO é perpendicular α, o cone é um *cone circular reto* (também chamado *cone de revolução*).

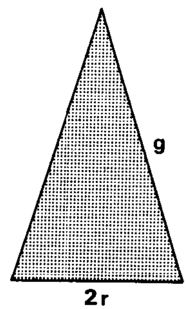
Se VO é oblíquo a α, o cone é um *cone circular oblíquo*.



Cone oblíquo



Cone reto



Secção meridiana

136• ELEMENTOS

uma base: o círculo de centro O e raio r

geratrizes: são os segmentos com uma extremidade em V e a outra nos pontos da circunferência de centro O e raio r. No cone reto, a geratriz é também chamada apótema.

vértice: é o ponto V.

137• ALTURA

É a distância entre o vértice e o plano da base.

138• SECÇÃO MERIDIANA

É a intersecção do cone com um plano que contém VO. A secção meridiana de um cone reto é um triângulo isósceles.

139• SUPERFÍCIES

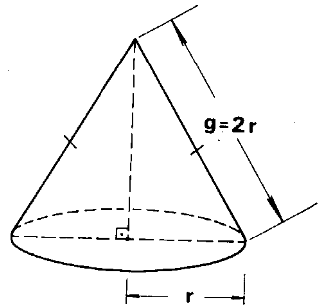
Superfície lateral: é a reunião das geratrizes.

Superfície total: é a reunião da superfície lateral com a base.

140• CONE EQUILÁTERO

É um cone cuja secção meridiana é um triângulo equilátero, portanto apresenta

$$g = 2r$$



II-B. VOLUME.

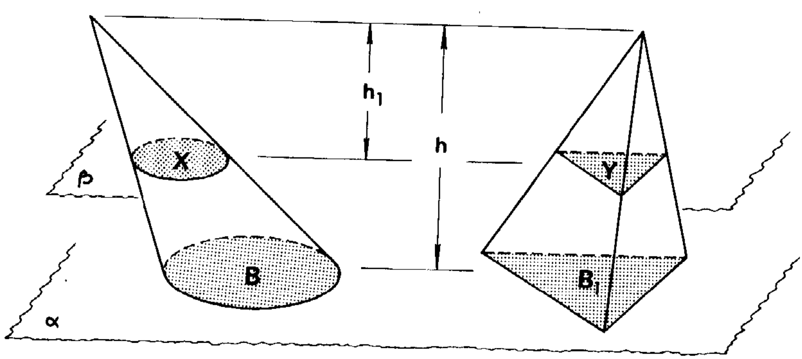
141• TEOREMA

"Todo cone é equivalente a uma pirâmide de base equivalente e altura congruente à do cone".

DEMONSTRAÇÃO

Dado um cone de área da base B e altura h, consideremos uma pirâmide de mesma altura h e base equivalente à do cone, situada no mesmo plano α.

Se β é um plano secante qualquer paralelo a α que intercepta o cone num círculo de área X e a pirâmide num triângulo de área Y que estão a uma distância h_1 do vértice, vem:



$$\frac{X}{B} = \left(\frac{h_1}{h}\right)^2 = \frac{Y}{B_1} \quad \text{e como} \quad B = B_1 \text{ , então: } X = Y.$$

Segue-se pelo Princípio de Cavalieri que o cone é equivalente à pirâmide.

142• VOLUME

Como conclusão do teorema acima, temos:

Volume do cone = Volume da pirâmide $\Longrightarrow V = \frac{1}{3} B \cdot h$

Como B = área da base do cone = πr^2, vem:

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$$

III. PARTE PRÁTICA.

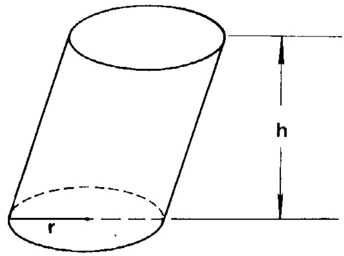
143• CILINDRO

1. Cilindro circular qualquer.

Área da base: $B = \pi r^2$

Volume: $V = B \cdot h$

$$\boxed{V = \pi r^2 h}$$

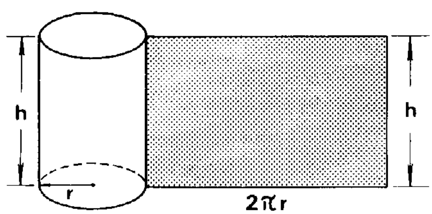


2. Cilindro circular reto ou cilindro de revolução.

As geratrizes são perpendiculares aos planos das bases.

Área lateral:

"A superfície lateral é equivalente a um retângulo de dimensões $2\pi r$ (comprimento da circunferência da base) e h"



$$\boxed{A_L = 2\pi r h}$$

(vide item 201)

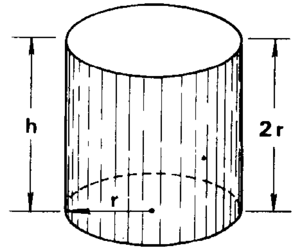
Área total:

$A_T = A_L + 2B \Longrightarrow A_T = 2\pi r h + 2\pi r^2 \Longrightarrow$ $\boxed{A_T = 2\pi r (h + r)}$

Volume: $V = B \cdot h \Longrightarrow$ $\boxed{V = \pi r^2 h}$

3. Cilindro equilátero.

A secção meridiana é um quadrado $\Longrightarrow h = 2r$



Área lateral:

$A_L = 2\pi r \cdot 2r \Rightarrow$ $\boxed{A_L = 4\pi r^2}$

Área total:

$A_T = A_L + 2B \Rightarrow A_T = 4\pi r^2 + 2\pi r^2 \Rightarrow$ $\boxed{A_T = 6\pi r^2}$

Volume: $V = B \cdot h \Longrightarrow V = \pi r^2 \cdot 2r \Rightarrow$ $\boxed{V = 2\pi r^3}$

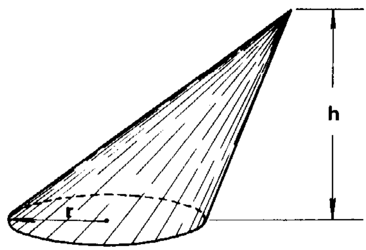
144• CONE

1. Cone circular qualquer.

Área da base: $B = \pi r^2$

Volume: $V = \frac{1}{3} B \cdot h$

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$$



2. Cone circular reto ou cone de revolução.

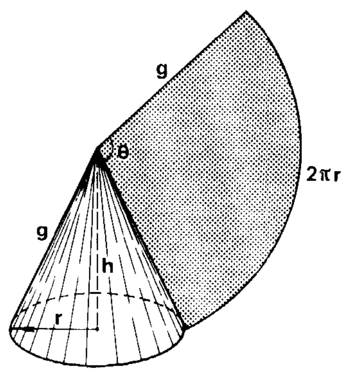
A projeção ortogonal do vértice sôbre o plano da base é o centro da base.

Área lateral:

"O desenvolvimento plano da superfície lateral é um setor circular de raio g e comprimento do arco $2\pi r$".

$A_L = \frac{1}{2}\, 2\pi r \cdot g$

$\boxed{A_L = \pi r g}$ (Vide item 203)



Se θ é o ângulo do setor:

$$\theta = \frac{2\pi r}{g} \text{ radianos.}$$

Área total: $A_T = A_L + B \Rightarrow A_T = \pi rg + \pi r^2 \Rightarrow$

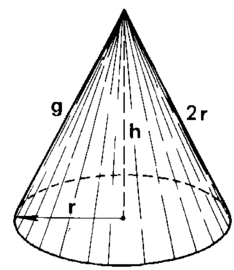
$$\Rightarrow \boxed{A_T = \pi r(g + r)}$$

Volume: $V = \frac{1}{3} B \cdot h \Rightarrow \boxed{V = \frac{1}{3} \pi r^2 h}$

Relação: $r^2 + h^2 = g^2$

3. Cone equilátero.

A secção meridiana é um triângulo equilátero.



$g = 2r \Rightarrow h = 2r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow h = r\sqrt{3}$

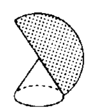
Área lateral: $A_L = \frac{1}{2} 2\pi r \cdot 2r \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{A_L = 2\pi r^2}$$

Área total: $A_T = A_L + B \Rightarrow A_T = 2\pi r^2 + \pi r^2 \Rightarrow \boxed{A_T = 3\pi r^2}$

Volume: $V = \frac{1}{3} B \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot r\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{V = \frac{\sqrt{3}}{3} \pi r^3}$

Ângulo do setor: $\theta = \frac{2\pi r}{2r} \Rightarrow \theta = \pi \text{ rad} \Rightarrow$



IV. PROBLEMAS RESOLVIDOS.

R.43 Calcular o raio, a altura e a área total de um cilindro circular reto que tem volume igual ao de um cubo de aresta $\underline{a}$ e área lateral igual à área da superfície do cubo.

SOLUÇÃO

Volumes: $\pi r^2 h = a^3$ (1)

Áreas: $2\pi r h = 6a^2 \Rightarrow \pi r h = 3a^2$ (2)

$$①\div②\implies r=\frac{1}{3}a$$

Em ②: $\pi\,\frac{1}{3}\,a\,h=3a^2\implies h=\frac{9}{\pi}a$

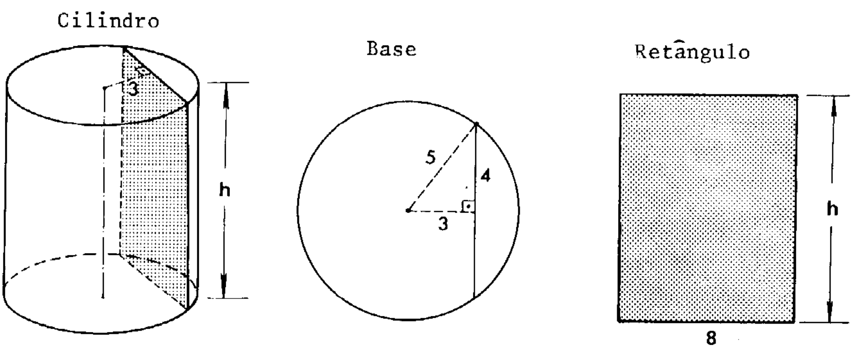
Área total: $A_T=A_L+2B$

$A_T=6a^2+2\,\pi\,\frac{1}{9}\,a^2\implies A_T=\frac{2}{9}\,(27+\pi)\,a^2$

RESPOSTA: $r=\frac{a}{3}$, $h=\frac{9a}{\pi}$, $A_T=\frac{2(27+\pi)a^2}{9}$

R.44 Calcular o volume de um cilindro de revolução de raio igual a 5dm, sabendo-se que êsse cilindro cortado por um plano paralelo ao eixo e a uma distância de 3 dm dêsse eixo, apresenta uma secção retangular equivalente à base.

SOLUÇÃO



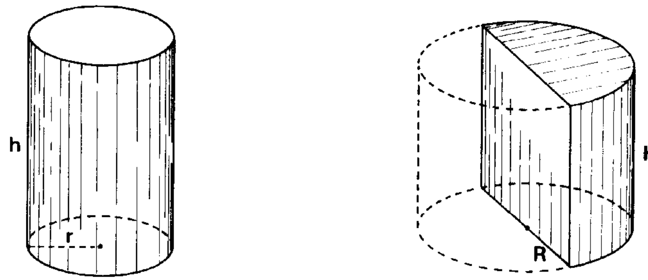
Área do retângulo = Área da base $\implies 8h=\pi 5^2\implies h=\frac{25}{8}\,\pi$

Volume: $V=B\cdot h\implies V=\pi 5^2\cdot\frac{25}{8}\pi\implies V=\frac{625}{8}\pi^2$

RESPOSTA: $\frac{625}{8}\pi^2\ dm^3$

R.45 Um cilindro de revolução de raio da base r e um semi-cilindro de revolução de raio da base R são equivalentes, e têm áreas laterais iguais. Calcular a relação entre r e R.

SOLUÇÃO



Volumes: $\pi r^2 h = \frac{1}{2} \pi R^2 H \Rightarrow 2r^2 h = R^2 H$ (1)

Áreas: $2\pi rh = \underbrace{\pi RH}_{\frac{1}{2}\text{ sup.cil.}} + \underbrace{2\,RH}_{\text{retângulo}} \Rightarrow 2\pi rh = RH\,(2 + \pi)$ (2)

De (1) : $\frac{h}{H} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{r^2}$ De (2): $\frac{R}{r} = \frac{h}{H} \cdot \frac{2\pi}{2 + \pi}$

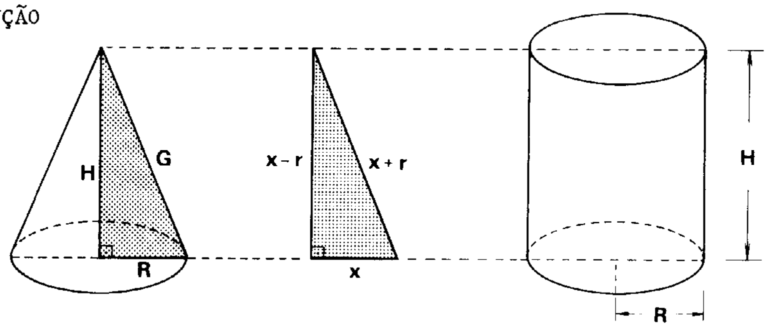
Substituindo $\frac{h}{H}$ vem:

$$\frac{R}{r} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{r^2} \cdot \frac{2\pi}{2 + \pi} \Rightarrow 1 = \frac{R}{r} \cdot \frac{\pi}{2 + \pi} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{\pi}{2 + \pi}$$

RESPOSTA: $\frac{r}{R} = \frac{\pi}{2 + \pi}$

R.46 (EEMACK - 69) Pediu-se para calcular o volume de um cone circular reto, sabendo-se que as dimensões da geratriz, do raio da base e da altura estão, nessa ordem, em progressão aritmética. Por engano, ao calcular-se o volume do cone, usou-se a fórmula do volume do cilindro circular reto de mesmo raio e de mesma altura do cone. O êrro obtido foi de $4\pi m^3$. Pede-se a altura e o raio do cone.

SOLUÇÃO



G, R e H em P.A. $\Rightarrow$ $G = x + r$, $R = x$, $H = x - r$

onde r é a razão (positiva) e x é o têrmo médio da P.A.

Do triângulo retângulo temos:

$x^2 + (x - r)^2 = (x + r)^2 \Rightarrow x^2 - 4xr = 0 \Rightarrow x(x - 4r) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 4r$ ou $x = 0$ (não convém)

As dimensões são $G = 5r$, $R = 4r$ e $H = 3r$

êrro $= BH - \frac{1}{3} BH = \frac{2}{3} BH \Rightarrow \frac{2}{3} BH = 4\pi$

Substituindo $B = \pi R^2 = \pi(4r)^2$ e $H = 3r$, vem

$$\frac{2}{3}\pi \cdot 16 r^2 \cdot 3r = 4\pi \Rightarrow r^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

Calculando a altura H e o raio:

$$H = 3r \Rightarrow H = \frac{3}{2} \qquad R = 4r \Rightarrow R = 2$$

RESPOSTAS: $H = \frac{3}{2}$ m e $R = 2$m

R.47 O volume e a área total de um cone reto são respectivamente $320\pi cm^3$ e $200\pi cm^2$.

Determinar o raio da base e a altura.

SOLUÇÃO

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = 320\pi \Rightarrow r^2 h = 960 \Rightarrow h = \frac{960}{r^2} \qquad (1)$$

$$\pi r(g + r) = 200\pi \Rightarrow r^2 + gr = 200 \Rightarrow g = \frac{200 - r^2}{r}$$

$$r^2 + h^2 = g^2$$

Substituindo h e g na última relação acima:

$$r^2 + \left(\frac{960}{r^2}\right)^2 = \left(\frac{200 - r^2}{r}\right)^2 \Rightarrow 400 r^4 - 40000 r^2 + 921600 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^4 - 100 r^2 + 2304 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r^2 = 64 \Rightarrow r = 8 \\ \text{ou} \qquad\qquad \text{ou} \\ r^2 = 72 \Rightarrow r = 6\sqrt{2} \end{cases}$$

Substituindo em (1) vem:

Para $r = 8$, $h = 15$ e para $r = 6\sqrt{2}$, $h = \frac{40}{3}$

RESPOSTA: ($r = 8$cm e $h = 15$ cm) ou ($r = 6\sqrt{2}$ cm e $h = \frac{40}{3}$ cm)

R.48 (MAPOFEI - 69) Uma esfera de raio R tem seu centro a uma distância $\underline{d}$ de um plano π.

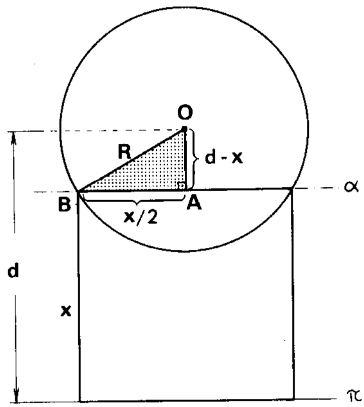
a) A que distância do plano π deve estar um outro plano α, paralelo a π, para que a intersecção de α com a esfera seja uma das bases de um cilindro equilátero (isto é, cuja altura é igual ao diâmetro da base) que possui outra base sôbre o plano π ?

b) Em que intervalo deve variar $\underline{d}$ para que o problema seja possível?

SOLUÇÃO

a) Chamemos de $\underline{x}$ a distância entre os planos. $\underline{x}$ é a medida da altura e do diâmetro da base do cilindro.

Consideremos o triângulo OAB, retângulo em A, onde O é o centro da esfera, A e B são respectivamente o centro e ponto da circunferência determinada por α na superfície esférica.



$OB = R$; $AB = \frac{x}{2}$; $OA = d - x$ (OA poderá ser $x - d$ o que não altera o problema).

$\Delta OAB \Rightarrow R^2 = (d - x)^2 + (\frac{x}{2})^2 \Rightarrow 5x^2 - 8dx + 4(d^2 - R^2) = 0$ (1)

De (1) sai $x = \dfrac{4d \pm \sqrt{5R^2 - d^2}}{5}$

que é a resposta do item (a) subordinada a discussão do item (b).

b) A soma das raízes de (1) é $\frac{8}{5}d > 0$ (notar que $d > 0$).

Então se as raízes são reais, pelo menos uma delas é positiva.

Logo, basta que o discriminante de (1) seja positivo ou nulo:

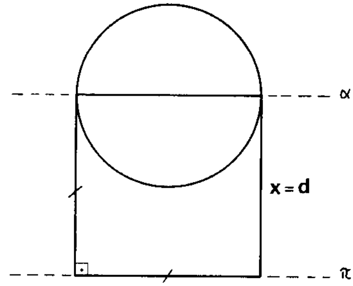
$\Delta \geqslant 0 \Rightarrow 16(5R^2 - d^2) \geqslant 0 \Rightarrow d \leqslant R\sqrt{5} \Rightarrow 0 < d \leqslant R\sqrt{5}$

NOTAS:

1ª) caso $x = d$, temos

$x = d = 2R$

o que é imediato.



2º) caso $d < R$

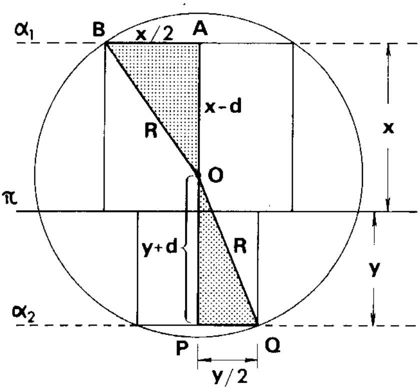
(o plano π secante à esfera) temos duas posições para α, a primeira (α_1) dada por x de (1) e a segunda (α_2) dada por y:

$R^2 = (y + d)^2 + (\frac{y}{2})^2 \implies$

$\implies 5y^2 + 8dy + 4(d^2 - R^2) = 0 \implies$

$\implies y = \dfrac{-4d + 2\sqrt{5R^2 - d^2}}{5}$

que não é raiz de (1).



V. PROBLEMAS PROPOSTOS.

P.112 Qual a razão entre a área total e a área lateral de um cilindro equilátero?

P.113 Determinar a área lateral, a área total e o volume de um cilindro equilátero de altura h.

P.114 Calcular a área lateral, área total e volume de um cilindro reto de 5 cm de raio sabendo que a secção meridiana é equivalente à base.

P.115 Calcular o volume de um cilindro cujo raio da base mede 5 cm e sabendo que as geratrizes de 15 cm formam com o plano da base um ângulo de 60°.

P.116 (FAUUSP - 63) Multiplica-se por k a altura e raio de um cilindro de revolução. Como se modifica a sua área lateral?

P.117 (ITA - 56) Qual a relação entre as alturas de um cilindro de revolução e uma pirâmide equivalentes se as bases também são equivalentes?

P.118 Calcular a área lateral de um cilindro de revolução, conhecendo seu volume $\underline{V}$ e seu raio $\underline{R}$.

P.119 Dois cilindros de revolução têm superfícies laterais equivalentes. Qual a razão de seus volumes?

P.120 Cada um dos raios das bases de dois cilindros é, respectivamente, a altura do outro. Sabendo que a razão entre os raios dos dois cilindros é K, estabelecer a razão entre as áreas totais dêsses dois cilindros.

P.121 Calcular a altura de um cilindro circular reto em função de sua área total $2\pi S$ e sua área lateral $2\pi A$.

P.122 Dão-se as áreas totais 18π m^2 e 32π m^2 de dois cilindros; cada um tem por raio e por altura, respectivamente, a altura e o raio do outro. Determinar os dois volumes.

P.123 Calcular o raio da base de um cilindro de área total πa^2 e altura $\underline{h}$.

P.124 (ITA - 64) Qual o volume do cone circular reto em que a altura é igual ao raio da base?

P.125 (FAUUSP - 68) Calcule a área total e volume de um cone equilátero sabendo que a área lateral é igual a 24π cm^2.

P.126 Calcular a área lateral, a área total e o volume de um cone de revolução equilátero de geratriz g .

P.127 (EEMAUÁ - 65) Um cone circular reto de altura $h = 3$m tem área lateral igual a 6π m^2. Determinar o ângulo que a geratriz g faz com a reta suporte de altura h .

P.128 A área total de um cone de revolução, de 1m de raio, é igual à terça parte da área de um círculo de diâmetro igual ao perímetro da secção meridiana do cone. Quanto mede a geratriz do cone?

P.129 A área da base de um cone de revolução é $\frac{1}{3}$ da área total. Calcular o ângulo do setor circular que é o desenvolvimento da superfície lateral do cone.

P.130 O diâmetro da base de um cone circular reto mede 3 m e a área da base é $\frac{2}{5}$ da área total. Calcular o ângulo do setor circular que é o desenvolvimento da superfície lateral do cone.

P.131 (EEMAUÁ - 66) O raio da base, a altura e o apótema (geratriz), de um cone reto formam, nesta ordem uma progressão aritmética. Determinar êsses elementos sendo 37,68 cm^3 o volume do cone. Adotar $\pi = 3,14$.

P.132 Calcular o raio e a altura de um cone de revolução cujo desenvolvimento é uma semi-circunferência de raio $\underline{a}$.

P.133 Calcular a altura, a área lateral e o volume de um cone de revolução de raio R e base equivalente à secção meridiana.

P.134 Calcular o raio da base de um cone de revolução conhecendo sua área total πa^2 e sua geratriz g.

P.135 Calcular o volume de um cone de revolução conhecendo a área lateral A e o apótema $\underline{g}$.

P.136 Calcular o volume de um cone de revolução conhecendo a área total S e a altura $\underline{h}$.

P.137 São dados um cone e um cilindro de revolução. Êsses sólidos têm a mesma altura e são equivalentes. A área lateral do cilindro é igual à área total do cone. Exprimir o volume do cone em função do seu raio $\underline{R}$.

P.138 Entre o volume $\underline{v}$, a área lateral A, a área total S de um cilindro de revolução tem-se:

$$8\pi\ v^2 = A^2\ (S - A).$$

P.139 Entre o volume V, a área lateral A, a área total $\underline{S}$ de um cone de revolução tem-se:

$$9\pi\ V^2 = S(S - A)(2A - S)$$

P.140 (EPUSP - 60) Dado um cone circular reto e um cilindro circular reto de mesma altura e mesma base, mostre que a área lateral do cilindro é menor que 2 vêzes a área lateral do cone.

VI. TESTES.

T.93 (EPUSP - 66) Aumentando de 6 unidades o raio ou a altura de um cilindro, num e noutro caso o seu volume aumenta de y unidades cúbicas. Sendo 2 a altura original, o raio original é:

a) 2
b) 4
c) 6
d) 6π
e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.94 (FFCLUSP - 69) As áreas das superfícies laterais de dois cilindros retos de bases circulares são iguais. Qual a relação entre seus volumes? Altura e raio da base são respectivamente H, R e h r.

a) $\frac{H}{h}$
b) $\frac{R}{r}$
c) $\frac{H^2}{h^2}$
d) $\frac{RH}{rh}$
e) $\frac{R^2}{r^2}$

T.95 (FEIUC - 66) Com um cartão em forma de setor circular com 15 cm de raio e 216° de ângulo central, constrói-se um cone cujo volume é:

a) 15 cm^3
b) 324π cm^3
c) 216π cm^3
d) 65π cm^3
e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.96 (EPUSP - 67) Desenvolvendo a superfície lateral de um cone reto de raio 4 e altura 3, obtem-se um setor circular cujo ângulo central mede:

a) 216°
b) 240°
c) 270°
d) 288°
e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.97 (CICE - 70) A área total de um cone circular reto é o triplo da área da base se e só se:

a) o volume é um
b) o volume do cilindro de mesmo raio e mesma altura é um.
c) a geratriz forma com o plano da base um ângulo de 60°.
d) a altura é igual ao diâmetro da base.
e) nada disso acontece.

T.98 (EESCUSP - 69) Um cone C tem volume V. Qual o volume de um cone C' de base igual à de C e cujo vértice está sôbre a circunferência de centro no vértice de C, situada num plano paralelo ao da base de C e de raio igual ao dôbro do raio da base de C?

a) 2V
b) 4V
c) 6V
d) 3V
e) V

T.99 (EESCUSP - 67) Dois cones de mesma base têm alturas iguais a 18 cm e 6 cm respectivamente. A razão de seus volumes é:

a) 3
b) 2
c) 6
d) 9
e) 4

T.100 (MACK - 69) Na fórmula $V = \frac{\pi}{3} r^2 h$, se $\underline{r}$ fôr reduzido à metade e h ao dôbro, então V:

a) se reduz à metade
b) permanece o mesmo
c) se reduz à quarta parte
d) dobra de valor
e) quadruplica de valor

T.101 (FEIUC - 66) Num problema em que se pedia o volume de um cone reto, o aluno trocou entre si as medidas do raio e da altura. Pode-se então afirmar que, o volume do cone

a) não se alterou
b) duplicou
c) triplicou
d) diminuiu
e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.102 (FFCLUSP - 67) A superfície total do cone equilátero de geratriz g é igual a

a) $\frac{3}{4} \pi g^2$
b) $2 \pi g^2$
c) $\frac{2}{3} \pi g^2$
d) $\frac{4}{3} \pi g^2$
e) Nenhuma das afirmações anteriores é verdadeira.

T.103 (EEMAUÁ - 68) É dado um cone reto de vértice V, altura h = 1m e raio da base r = 3 m. A medida de uma corda AB da circunferência da base tal que a área do triângulo VAB seja igual a 5 m^2 é:

a) $2\sqrt{5}$ m
b) $\sqrt{5}$ m
c) $\sqrt{2}$ m
d) $\sqrt{10}$ m
e) n.d.a.

CAPÍTULO VII

INSCRIÇÃO E CIRCUNSCRIÇÃO DE SÓLIDOS

I. PROBLEMAS RESOLVIDOS.

145• Aqui trataremos da inscrição e circunscrição mais comuns de sólidos. O assunto tem aspecto de problemas resolvidos.
Alguns itens e problemas se referem à esfera; adiantaremos, então, as expressões do volume da esfera e da área da superfície esférica.

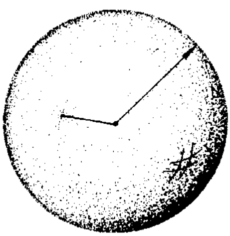
146• ESFERA

Volume: $\boxed{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$

Área da superfície esférica:

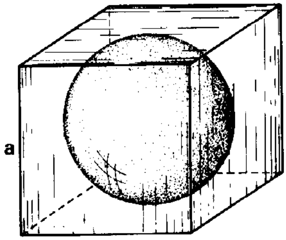
$$\boxed{A = 4\pi r^2}$$

(as deduções dessas fórmulas aparecem nos itens 199 e 202).



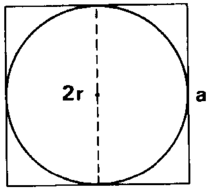
147• ESFERA E CUBO

R.49 Cálculo do raio (r) da esfera inscrita num cubo de aresta $\underline{a}$.

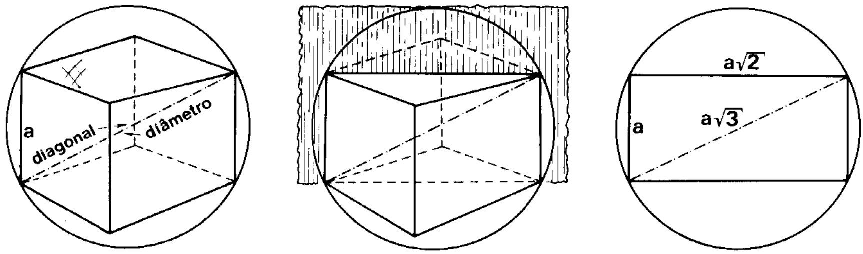


$$2r = a$$

$$\boxed{r = \frac{a}{2}}$$



R.50 Cálculo do raio (R) da esfera circunscrita a um cubo de aresta a.

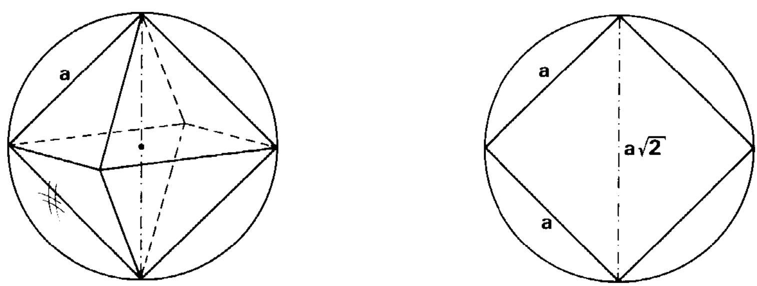


O diâmetro da esfera é igual à diagonal do cubo.

$$2R = a\sqrt{3} \Longrightarrow \boxed{R = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

148• ESFERA E OCTAEDRO REGULAR

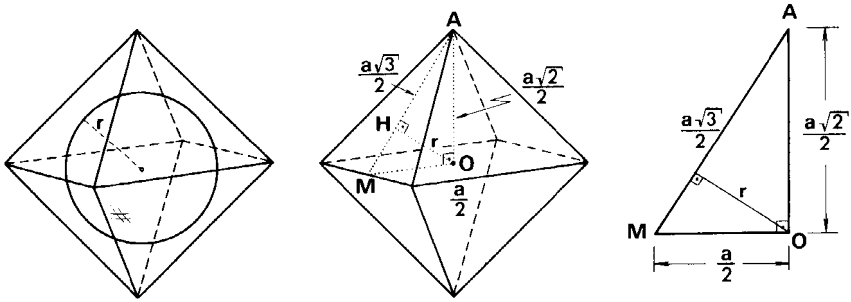
R.51 Cálculo do raio (R) da esfera circunscrita a um octaedro regular de aresta a.



O diâmetro da esfera é igual à diagonal do octaedro (diagonal do quadrado)

$$2R = a\sqrt{2} \Longrightarrow \boxed{R = \frac{a\sqrt{2}}{2}}$$

R.52 Cálculo do raio (r) da esfera inscrita num octaedro regular de aresta $\underline{a}$.



O raio da inscrita é a altura OH do triângulo retângulo AOM (e lembrando ah = bc)

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot r = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a}{2} \implies \boxed{r = \frac{a\sqrt{6}}{6}}$$

OBS.: A distância entre duas faces paralelas do octaedro regular é 2r.

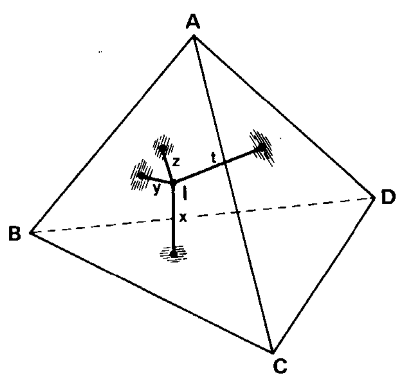
149• ESFERA E TETRAEDRO REGULAR

R.53 Propriedade: Em um tetraedro regular a soma das distâncias de um ponto interior qualquer às quatro faces é igual à altura.

Sendo I o ponto interior; x, y, z e t as respectivas distâncias às faces BCD, ABC, ABD e ACD temos que provar que:

$$x + y + z + t = h$$

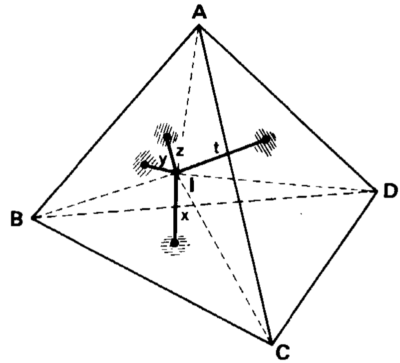
onde h é a altura do tetraedro.



DEMONSTRAÇÃO

A soma dos volumes das pirâmides IBCD, IABC, IABD e IACD é igual ao volume de ABCD.

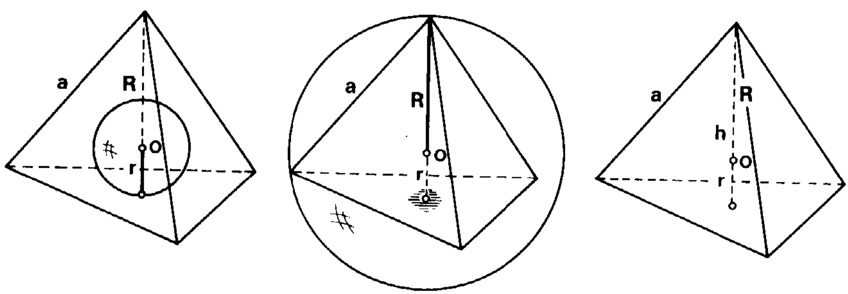
Sendo S a área da face do tetraedro, vem:



$$\frac{1}{3}Sx + \frac{1}{3}Sy + \frac{1}{3}Sz + \frac{1}{3}St = \frac{1}{3}Sh$$

então $\quad x + y + z + t = h$

R.54 Cálculo do raio da esfera inscrita (r) e da esfera circunscrita (R) num tetraedro regular de aresta a .



Sendo o centro (O) um ponto interior do tetraedro regular, vale a propriedade acima.

$x + y + z + t = h \quad$ e como $\quad x = y = z = t = r \quad$ vem:

$$4r = h \implies \boxed{r = \frac{1}{4}h}$$

Como $R + r = h$, então $\boxed{R = \frac{3}{4}h}$

E ainda sendo $h = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$,

$$\boxed{r = \frac{a\sqrt{6}}{12}} \quad \text{e} \quad \boxed{R = \frac{a\sqrt{6}}{4}}$$

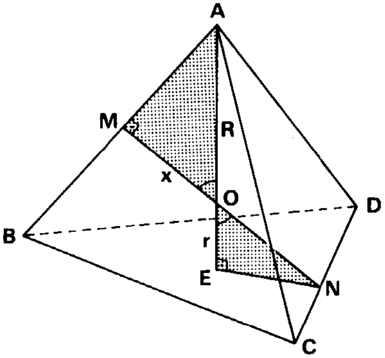
R.55 O raio da esfera tangente às arestas de um tetraedro regular é média geométrica entre os raios das esferas inscrita e circunscrita ao mesmo tetraedro.

SOLUÇÃO

R, r e x são os respectivos raios da circunscrita, inscrita e tangente.

$\Delta AMO \sim \Delta NEO \Longrightarrow \frac{x}{r} = \frac{R}{x} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x^2 = R \cdot r$



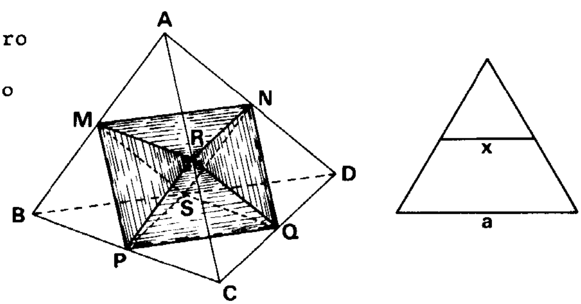
150• INSCRIÇÃO E CIRCUNSCRIÇÃO ENVOLVENDO POLIEDROS REGULARES

R.56 Octaedro regular determinado pelos pontos médios das arestas de um tetraedro regular.

a = aresta do tetraedro

x = aresta do octaedro

$$\boxed{x = \frac{a}{2}}$$



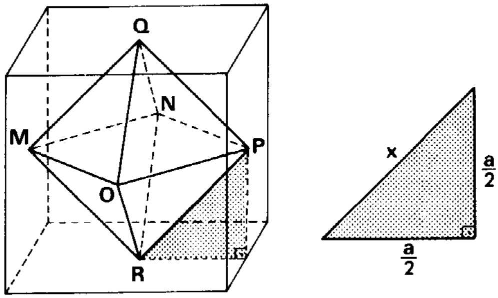
R.57 Octaedro determinado pelos centros das faces de um cubo

a = aresta do cubo

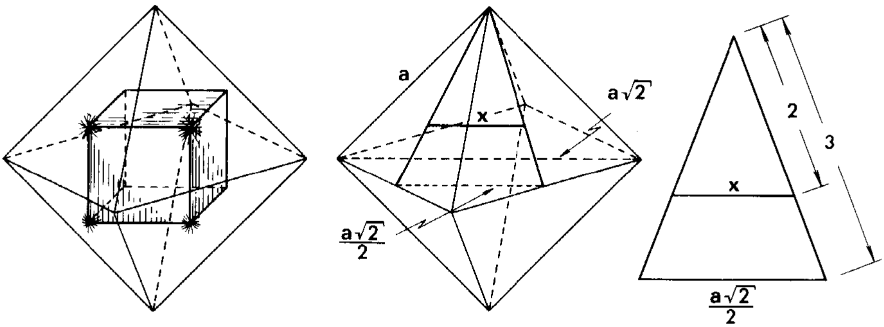
x = aresta do octaedro

$x^2 = (\frac{a}{2})^2 + (\frac{a}{2})^2$

$$\boxed{x = \frac{a\sqrt{2}}{2}}$$



R.58 Cubo determinado pelos centros das faces de um octaedro regular.



a = aresta do octaedro

x = aresta do cubo

$$x = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{a\sqrt{2}}{3}}$$

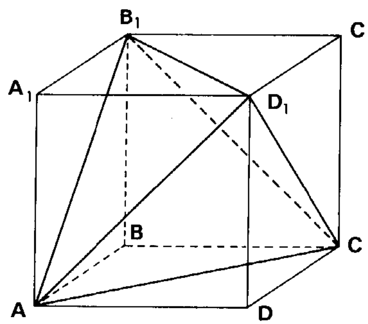
R.59 Tetraedro regular com ertices nos vértices de um cubo.

ACB_1D_1 é tetraedro regular

a = aresta do cubo

x = aresta do tetraedro

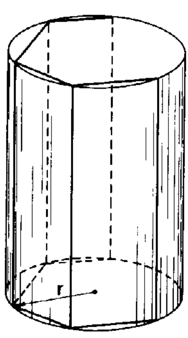
$$\boxed{x = a\sqrt{2}}$$



151• PRISMA E CILINDRO

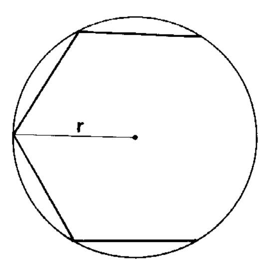
R.60 Prisma inscrito em cilindro.

Êles têm a mesma altura. Basta trabalhar nas bases.

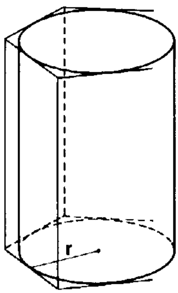


O raio da base do cilindro é o raio da circunferência circunscrita à base do prisma.

BASE

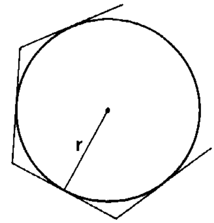


R.61 Cilindro inscrito em prisma.



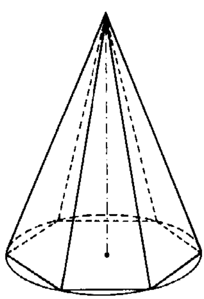
O raio da base do cilindro é o raio da circunferência inscrita na base do prisma.

BASE



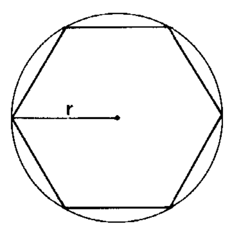
152• PIRÂMIDE E CONE

R.62 Pirâmide inscrita em cone.

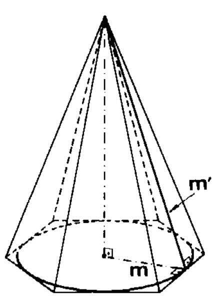


O raio da base do cone é o raio da circunferência circunscrita à base da pirâmide.

BASE

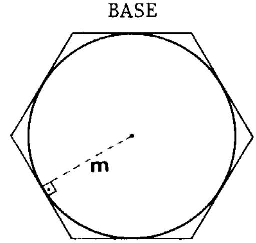


R.63 Cone inscrito em pirâmide regular.



O raio da base do cone é o apótema da base da pirâmide. A geratriz do cone é o apótema da pirâmide.

BASE



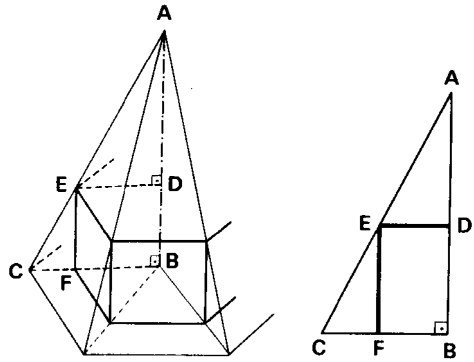
153• PRISMA INSCRITO EM PIRÂMIDE

Destacar as semelhanças:

$\Delta ADE \sim \Delta ABC$;

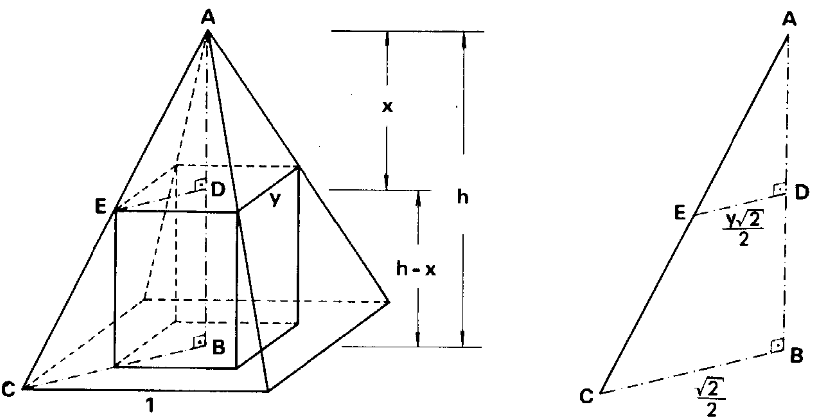
$\Delta EFC \sim \Delta ABC$;

$\Delta ADE \sim \Delta EFC$.



EXEMPLO

R.64 (EPUSP - 45) Uma pirâmide regular de base quadrada tem o lado da base igual a 1 e a altura igual a h. Seccioná-la com um plano paralelo à base de modo que o prisma, que têm por bases a secção da pirâmide com o plano considerado e a projeção ortogonal dessa secção sôbre a base da pirâmide, tenha superfície lateral $4S^2$. Pede-se a distância da secção ao vértice da pirâmide.



Sendo x a distância pedida e y a aresta da base do prisma, vem:

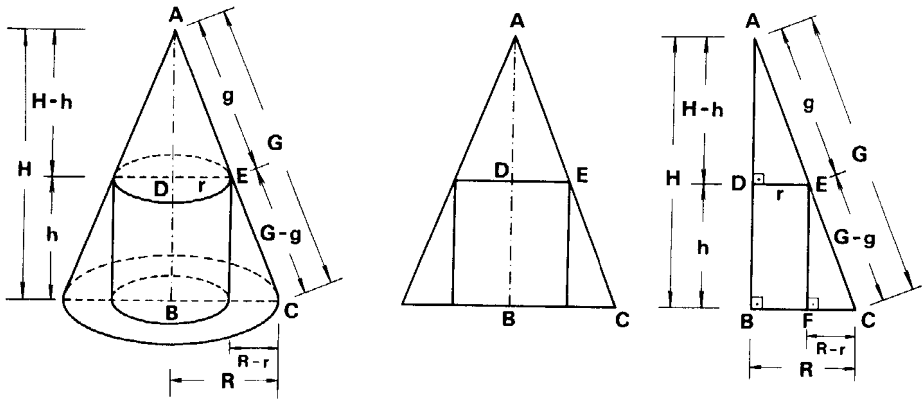
Área lateral $= 4S^2 \Rightarrow 4 \cdot y(h-x) = 4S^2 \Rightarrow y(h-x) = S^2$ (1)

Da semelhança: $\frac{x}{h} = \dfrac{y\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Longrightarrow y = \frac{x}{h}$

Em (1): $\frac{x}{h}(h-x) = S^2 \Rightarrow x^2 - hx + S^2h = 0 \Rightarrow x = \frac{h \pm \sqrt{h(h-4S^2)}}{2}$

Condição: $h - 4S^2 \geqslant 0 \Rightarrow h \geqslant 4S^2$

154• CILINDRO CIRCULAR RETO INSCRITO EM CONE RETO



Usando os elementos indicados nas figuras, temos:

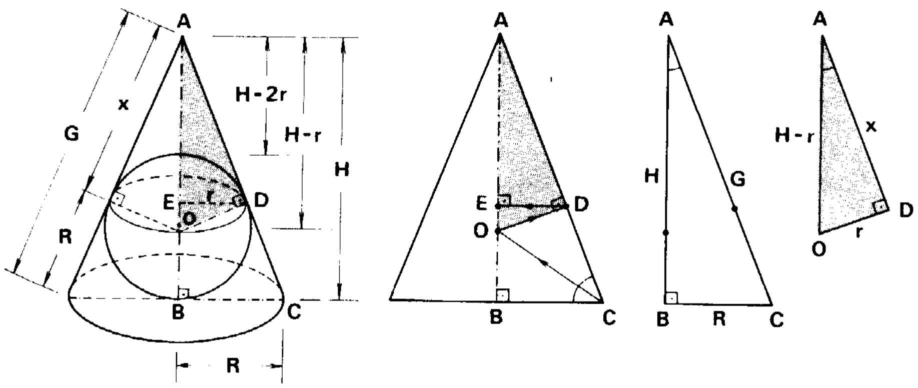
$\Delta ADE \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{g}{G} = \frac{r}{R} = \frac{H-h}{H}$

$\Delta EFC \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{G-g}{G} = \frac{R-r}{R} = \frac{h}{H}$

$\Delta ADE \sim \Delta EFC \Rightarrow \frac{g}{G-g} = \frac{g}{R-r} = \frac{H-h}{h}$

155• ESFERA E CONE RETO

R.65 Esfera inscrita em cone reto.



O é o centro da esfera inscrita (OC é bissetriz)

E é o centro da circunferência segundo a qual a superfície cônica tangencia a esfera.

D é o ponto de tangência

$$\Delta ADO \sim \Delta\ ABC \implies \frac{x}{H} = \frac{r}{R} = \frac{H - r}{G}$$

x é calculado no ΔADO retângulo em D:

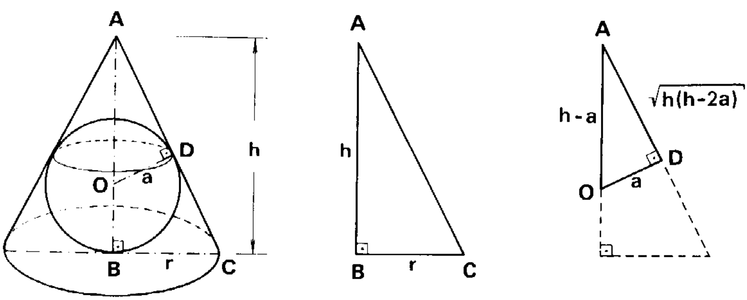
$$x^2 = (H - r)^2 - r^2 \implies \boxed{x = \sqrt{H\ (H - 2r)}}$$

EXEMPLO

R.66 (FEIUC - 51) Quando um cone está circunscrito a uma esfera de raio $\underline{a}$, o raio $\underline{r}$ e a altura $\underline{h}$ do cone estão ligados ao raio da esfera pela relação:

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} = \frac{2}{ah}$$

SOLUÇÃO

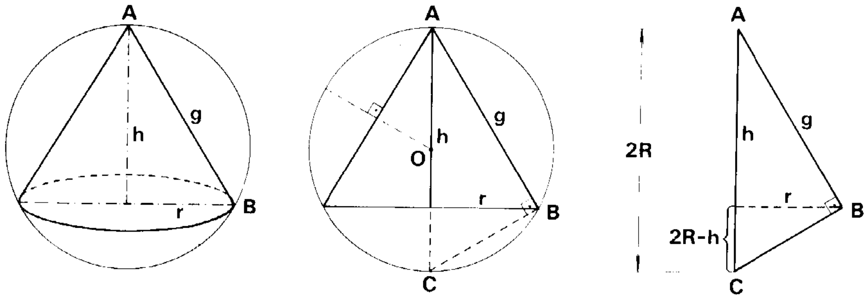


$$\Delta ADO \sim \Delta ABC \implies \frac{\sqrt{h(h - 2a)}}{h} = \frac{a}{r} \implies \frac{h - 2a}{h} = \frac{a^2}{r^2}$$

Dividindo-se por a^2, $\dfrac{h - 2a}{a^2\ h} = \dfrac{1}{r^2} \implies \dfrac{h}{a^2 h} - \dfrac{2a}{a^2 h} = \dfrac{1}{r^2} \implies$

$$\implies \frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} = \frac{2}{ah}$$

R.67 Esfera circunscrita a um cone reto



Do triângulo retângulo ABC sai:

$\boxed{g^2 = 2R.h}$ $\boxed{r^2 = h\ (2R - h)}$

EXEMPLO

R.68 Calcular a geratriz de um cone reto de raio 6, inscrito numa esfera de diâmetro 12,5.

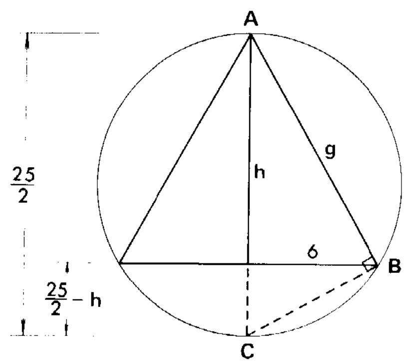
Do triângulo retângulo ABC vem:

$g^2 = \frac{25}{2} \cdot h$ (1)

$6^2 = h\ (\frac{25}{2} - h) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow 2h^2 - 25h + 72 = 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow h_1 = 8$ e $h_2 = \frac{9}{2}$



Substituindo-se h_1 e h_2 em (1) temos:

$g_1^2 = \frac{25}{2} \cdot 8 \Longrightarrow g_1 = 10$ $g_1^2 = \frac{25}{2} \cdot \frac{9}{2} \Longrightarrow g_2 = \frac{15}{2}$

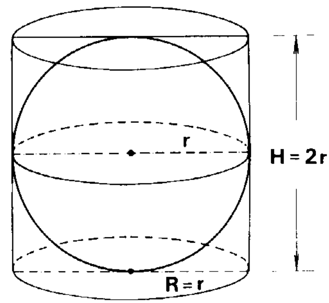
RESPOSTA: A geratriz mede 10 ou 7,5.

OBSERVAÇÃO: Para se inscrever ou circunscrever uma esfera numa pirâmide é conveniente inscrever ou circunscrever um cone na pirâmide e depois trabalhar com o cone e a esfera.

156• ESFERA, CILINDRO EQUILÁTERO E CONE EQUILÁTERO

R.69 Dada uma esfera de raio r calcular a área da base (B), área lateral (A_L), área total (A_T) e volume do cilindro equilátero circunscrito.

Elementos:



Seja R o raio da base e H a altura do cilindro. Então:

$R = r$ e $H = 2r$

Área da base: $B = \pi r^2$

Área lateral: $A_L = 2\pi r \cdot 2r \implies$

$\implies A_L = 4\pi r^2$

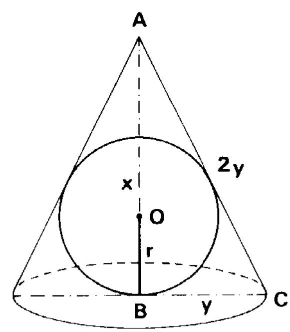
Área total: $A_T = A_L + 2B \implies$

$\implies A_T = 6\pi r^2$

Volume: $V = B \cdot H \implies V = \pi r^2 \cdot 2r \implies V = 2\pi r^3$

R.70 Calcular a área da base (B), área lateral (A_L), área total (A_T) e volume do cone equilátero circunscrito.

Elementos:



Seja x a altura e y o raio da base do cone.

O é baricentro $\implies x = 3r$

$\triangle ABC \xrightarrow{T.P.} (2y)^2 = y^2 + 9r^2 \implies$

$\implies y^2 = 3r^2$

Área da base: $B = \pi y^2 \implies$

$\implies B = 3\pi r^2$

Área lateral: $A_L = \pi y \cdot 2y = 2\pi y^2 \implies A_L = 6\pi r^2$

Área total: $A_T = A_L + B \implies A_T = 6\pi r^2 + 3\pi r^2 \implies A_T = 9\pi r^2$

Volume: $V = \frac{1}{3} B \cdot x \implies V = \frac{1}{3} \cdot 3\pi r^2 \cdot 3r \implies V = 3\pi r^3$

R.71 Relações

1. Entre as áreas totais calculadas e a área da superfície esférica.

$$\left.\begin{array}{l} A_{T_{cil}} = 6\pi r^2 = 6k \Rightarrow A^2_{T_{cil}} = 36\ k^2 \\ \left.\begin{array}{l} A_{T_{cone}} = 9\ \pi r^2 = 9k \\ A_{esfera} = 4\ \pi r^2 = 4k \end{array}\right\} \Rightarrow A_{T_{cone}} \cdot A_{esf} = 36\ k^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{A^2_{T_{cil}} = A_{T_{cone}} \cdot A_{esf}} \qquad \text{(média geométrica)}$$

2. Entre os volumes calculados e o volume da esfera.

$$\left.\begin{array}{l} V_{cil} = 2\ \pi r^3 = 2\ k_1 = \frac{6}{3}\ k_1 = 6K \\ V_{cone} = 3\ \pi r^3 = 3\ k_1 = \frac{9}{3}\ k_1 = 9K \\ V_{esf} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} k_1 = \frac{4}{3}\ k_1 = 4K \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{V_{cil} = V_{cone} \cdot V_{esf}} \qquad \text{(média geométrica)}$$

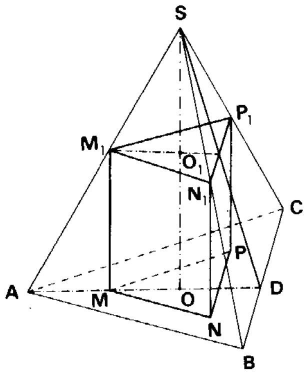
R.72 Considerando o cilindro equilátero circunscrito e a esfera, temos:

1. A área lateral do cilindro é igual à área da superfície esférica.

2. $$\left.\begin{array}{l} \dfrac{A_{esf}}{A_{T_{cil}}} = \dfrac{4\ \pi r^2}{6\ \pi r^2} = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{V_{esf}}{V_{cil}} = \dfrac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2\ \pi r^3} = \dfrac{2}{3} \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \frac{A_{est}}{A_{T_{cil}}} \quad \frac{V_{esf}}{V_{cil}} = \frac{2}{3}$$

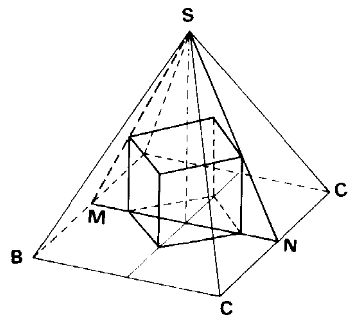
157• Para finalizar êste capítulo veremos alguns exemplos em *têrmos de figuras* de inscrição e circunscrição de sólidos.

Prisma em pirâmide



Note os triângulos semelhantes

Prisma em pirâmide



Triângulos semelhantes

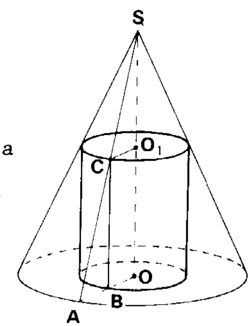
Cilindro em cone

$\Delta SOA \sim \Delta SO_1C$

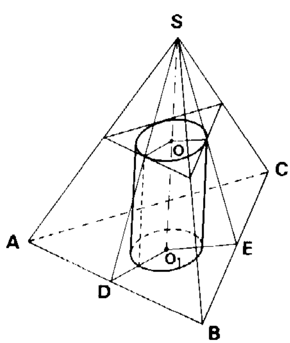
$\Delta SOA \sim \Delta CBA$

$\Delta SO_1C \sim \Delta CBA$

Note a semelhança entre triângulos

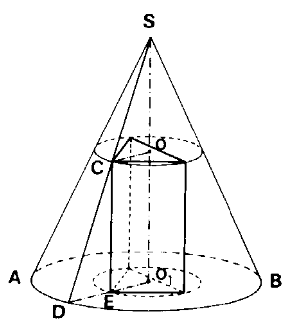


Cilindro em pirâmide



Note o prisma circunscrito ao cilindro.

Prisma em cone



Note o cilindro circunscrito ao prisma.

Esfera em cone

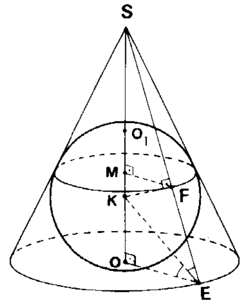
Notar as semelhanças entre os triângulos.

ΔSOE retângulo em O

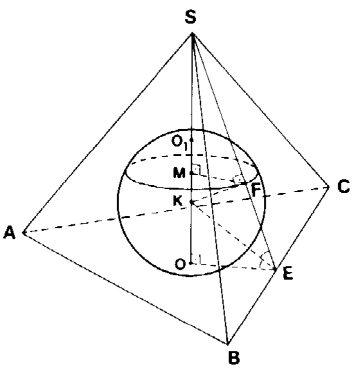
ΔSFK retângulo em K

ΔSMF retângulo em F

EK é bissetriz de $\hat{E}$.

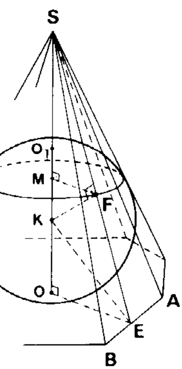


Esfera em pirâmide



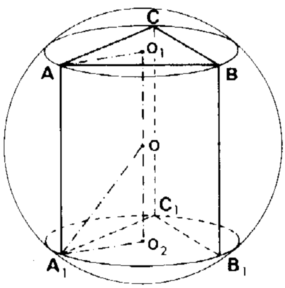
Note a analogia com o caso acima.

Esfera em pirâmide



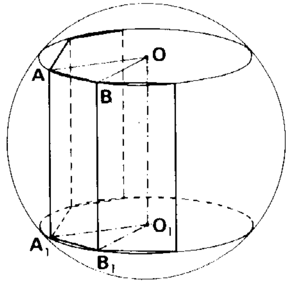
Note os pontos K, F e M

Prisma em esfera



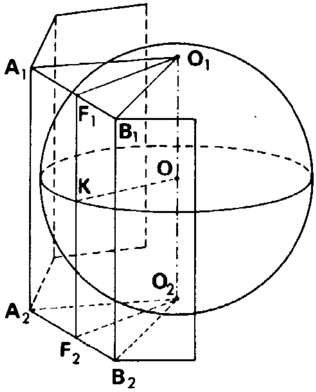
Note o cilindro

Prisma em esfera



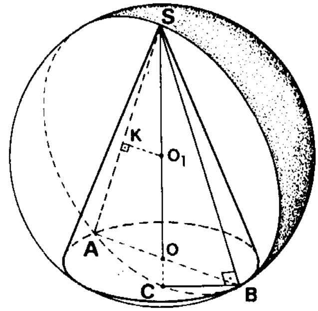
Note o cilindro

Esfera em prisma



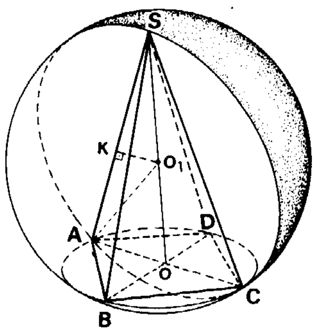
A altura é o diâmetro

Cone em esfera



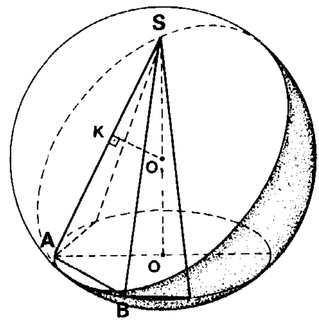
KO_1 é mediatriz de SA o triângulo SBC é retângulo em C.

Pirâmide em esfera



Note a analogia com o caso acima.

Pirâmide em esfera



Note os pontos K e O_1

II. PROBLEMAS PROPOSTOS.

P.141 Calcular a área e o volume de um octaedro regular em função da aresta $\underline{a}$.

P.142 (FFCLUSP -,57) Calcular as áreas e os volumes das esferas inscrita e circunscrita num tetraedro regular de aresta $\underline{a}$.

P.143 (EESCUSP - 53) Duas esferas são circunscrita e inscrita a um mesmo octaedro. Calcular a razão entre seus volumes.

P.144 (FEIUC - 63) Achar a aresta $\underline{a}$ de um tetraedro regular em função:
a) da altura $\underline{h}$; b) do raio R da esfera circunscrita.

P.145 (FAMACK - 66) Um tetraedro regular é inscrito numa esfera de 12 centímetros de diâmetro. Qual o valor do volume do tetraedro?

P.146 (EESCUSP - 56) Demonstrar que o raio da esfera tangente às seis arestas de um tetraedro regular é média proporcional entre o raio da esfera inscrita e o raio da esfera circunscrita no mesmo tetraedro.

P.147 (ENE - 58) Calcule a área do octaedro regular inscrito em uma esfera cuja secção meridiana tem $16\ \pi$ de área.

P.148 (EESCUSP - 55) Dado um tetraedro regular, estudar o poliedro P que tem como vértice os pontos médios das arestas do tetraedro. Se ℓ é o lado do tetraedro, calcular a área total e o volume de P .

P.149 (EPUSP - 65) Escolha 4 dos vértices de um cubo de modo a formar um tetraedro regular. Sendo V o volume do cubo, qual o volume dêsse tetraedro?

P.150 (EESCUSP - 56) Dado um cubo de aresta igual a ℓ, considera-se o octaedro que tem por vértices os centros das faces do cubo. Calcular a área da superfície esférica inscrita no octaedro.

P.151 (FEIUC - 64) Determinar o volume do octaedro cujos vértices são os pontos médios das faces do paralelepípedo reto-retângulo de dimensões $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$.

P.152 (EPUSP - 64) Num paralelepípedo retângulo a, b, c assinalemos os pontos médios de tôdas as arestas e unamos dois a dois aquêles pontos médios que pertencem a arestas concorrentes num mesmo vértice. Suprimindo os oito tetraedros que ficam assim determinados nos triedros do paralelepípedo, obtém-se um poliedro. Determine o volume dêsse poliedro em função de a, b e c.

P.153 Dada a medida $\underline{\ell}$ da aresta de um cubo, determinar a área lateral e o volume de uma pirâmide que tem para base uma face do cubo e para vértice o centro da face oposta.

P.154 Dado um tetraedro regular de aresta $\underline{a}$, determinar:

a) a aresta do octaedro cujos vértices são pontos médios das arestas do tetraedro.

b) a aresta do cubo cujos vértices são centros das faces do octaedro obtido acima.

c) a aresta de um novo octaedro, cujos vértices são centros das faces do cubo obtido acima.

P.155 (ITA - 59) Demonstre que a afirmativa abaixo é verdadeira: "Inscreve-se um cubo C em uma esfera E. Nesse cubo inscreve-se uma esfera E'. Inscreve-se um novo cubo C' na esfera E'. A área total do cubo C' é $\frac{2}{3}\ \frac{S}{\pi}$, onde S é a área da esfera E.

P.156 (EEMAUÁ - 63) Uma esfera de raio R está colocada em uma caixa cúbica, sendo tangente às paredes da caixa. Essa esfera é retirada da caixa e em seu lugar são colocadas 8 (oito) esferas iguais, tangentes entre si e também às paredes da caixa. Pede-se determinar a relação entre o volume não ocupada pela esfera única e o volume não ocupado pelas 8 (oito) esferas.

P.157 (ITA - 66) "No interior de um cubo regular de aresta $\underline{a}$, existem 9 esferas de mesmo raio $\underline{r}$. O centro de uma dessas esferas coincide com o centro do cubo e cada uma das demais esferas tangencia a esfera do centro e três faces do cubo. Exprimir $\underline{a}$ em função de $\underline{r}$.

P.158 A área total de um cubo é 24 cm^2. Seccionar êste cubo por um plano, tal que a secção determinada seja um hexágono regular e calcular a área dêsse hexágono.

P.159 (EPUSP - 59) Prove que a soma das distâncias dos seis vértices de um octaedro regular a um plano externo é igual a seis vêzes a distância do centro do mesmo ao plano.

P.160 (EPUSP - 67) Uma esfera de raio R é tangente às três faces de um triedro, cada uma das quais mede 60^o. Achar a distância do vértice do triedro ao centro da esfera.

P.161 (EESCUSP - 66) Dado num plano π um triângulo equilátero ABC de lado $\underline{\ell}$, sôbre a perpendicular em A ao plano π toma-se um ponto D tal que AD = $\underline{2\ell}$. Determinar a posição do centro e calcular o raio da esfera circunscrita ao tetraedro ABCD.

P.162 Num cone circular reto de 18 m de altura, inscreve-se uma esfera de 5 m de raio. Pede-se o diâmetro da base e a geratriz do cone.

P.163 Numa esfera de 6 cm de raio circunscreve-se um cone reto de raio 12 cm. Calcular a altura e a geratriz do cone.

P.164 Calcular o diâmetro de uma esfera inscrita em um cone reto de raio da base 12 e geratriz 20.

P.165 (FAUUSP - 62) Em uma cavidade cônica, cuja abertura tem um raio de 8 cm e de profundidade $\frac{32}{3}$ cm, deixa-se cair uma esfera de 6cm de raio. Achar a distância do vértice da cavidade cônica ao centro da esfera .

P.166 (FAUUSP - 68) Calcule o volume do cilindro inscrito num prisma reto, de altura 12,5 cm, cuja base é um losango de diagonais 8 cm e 6 cm.

P.167 (FAUUSP - 68) Determine o volume da esfera inscrita no cilindro de volume 18 cm^3.

P.168 (FAUUSP - 69) Calcular o volume da esfera circunscrita ao cone equilátero cujo raio da base é igual a $2\sqrt{3}$ cm.

P.169 (ITA - 61) Determinar:

1) a relação entre os volumes de uma esfera de raio $\underline{R}$ e do cone equilátero circunscrito;
2) a relação entre os volumes da esfera e do cilindro circunscrito.

P.170 (FFCLUSP - 58) Determinar:

1) a relação entre a área de uma superfície esférica e a área total do cone equilátero circunscrito;
2) a relação entre a área da superfície esférica e a área total do cilindro circunscrito.

P.171 A área total do cilindro circunscrito a uma esfera é a média aritmética entre as áreas da esfera inscrita e da circunscrita ao cilindro.

P.172 Considere-se um cone de revolução SAB, de apótema SA = a, cujo desenvolvimento da superfície lateral é um semi-círculo.

1º) Calcular, em função de $\underline{a}$, o raio da base, a altura $\underline{h}$, a área total $\underline{S}$ e o volume $\underline{V}$ do cone;

2º) Calcular, em função de $\underline{a}$, a área $\underline{S}'$ e o volume $\underline{V}'$ da esfera inscrita no cone;

3º) Calcular as relações: $\frac{S'}{S}$ e $\frac{V'}{V}$

P.173 Dada uma esfera de raio R:

a) Calcular B, A_L, A_T e V do cilindro equilátero inscrito na esfera;

b) Calcular B, A_L, A_T e V do cone equilátero inscrito na esfera;

c) Estabeleça uma relação (a melhor) entre o volume do cilindro do cone e da esfera acima.

P.174 (EELINS - 67) Num cilindro de revolução cuja altura é igual ao diâmetro da base, inscrevem-se uma esfera e um cone reto. Demonstrar que o volume da esfera é dôbro do volume do cone.

P.175 (EPUSP - 59) Exprima por uma igualdade que "o volume do cilindro equilátero é igual à soma dos volumes da esfera e do cone nele inscritos".

P.176 Em um cilindro circular reto de raio $\underline{R}$ e altura $\underline{h}$ inscrever um paralelepípedo retângulo de base quadrada e calcular a área total do mesmo.

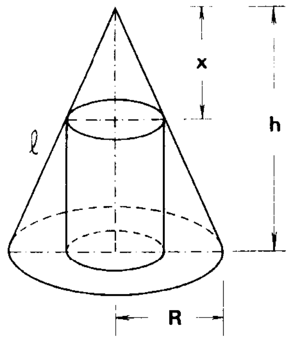
P.177 (FFCLUSP - 54) Num cubo está inscrita uma esfera de raio $\underline{R}$. Calcular a área lateral do cone reto cuja base está circunscrita a uma das faces do cubo e cujo vértice é o centro da esfera.

P.178 (FEFAAP - 68) Uma vaso cilíndrico cujo raio da base é $\underline{r}$ e cuja altura é 2r está cheio de água. Mergulha-se nesse vaso um tetraedro regular até que sua base fique inscrita na base do cilindro. Há transbordamento da água. Retirando-se o tetraedro do vaso, qual é a altura da coluna de água?

P.179 Inscrever um cilindro num cone dado de raio $\underline{R}$ e apótema $\underline{G}$, de modo que a área lateral do cone que está acima do cilindro seja igual a área da coroa cujas circunferências são a base do cilindro e a do cone.

P.180 (FAUUSP - 66) É dado um cone cujo raio da base é $\underline{R}$ e cuja altura é $\underline{h}$. Inscrever um cilindro de modo que a área lateral dêste seja igual à área lateral do cone parcial determinado pela base superior do cilindro.

P.181 (EEMAUCK - 51) Inscrever um cilindro num cone de modo que a superfície total do cone parcial obtido esteja na relação m:n com a superfície total do cilindro.



P.182 Uma esfera inscrita num cone reto, com os elementos:

r – raio da esfera; G – geratriz;
R – raio da base do cone; H – altura.

Resolver os problemas abaixo:

1º) dados G e R, calcular H e r
2º) dados G e H, calcular R e r
3º) dados H e R, calcular G e r
4º) dados H e r, calcular G e R

P.183 (FFCLUSP - 55) Sendo $\underline{h}$ e $\underline{g}$ os comprimentos, respectivamente, da altura e da geratriz de um cone, calcular o volume da esfera circunscrita a êste cone.

P.184 (EPUSP - 53) Calcular o raio da base de um cone circular reto, circunscrito a uma esfera de raio unitário, sabendo-se que o diâmetro da esfera é igual ao segmento maior da secção áurea da altura daquele cone.

P.185 (EPUSP - 63) Prove que a razão entre o volume de qualquer cone (circular reto) e o volume da esfera inscrita é superior ou igual à dois.

P.186 (FEIUC - 60) Num cone de revolução de altura H e geratriz g, inscreve-se um cilindro. A área lateral do cone é igual à área lateral do cilindro multiplicada por $\underline{m}$. Pergunta-se:

1) Qual a altura $\underline{h}$ do cilindro?

2) Que condições devem satisfazer os dados para que o problema seja possível?

P.187 (FAUUSP - 67) Divide-se um dos raios OA de uma esfera em cinco partes iguais $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A$ e pelos quatro pontos A_i de divisão são traçados planos perpendiculares a OA. Determinar a soma das áreas das quatro secções da esfera pelos referidos planos, sabendo que o círculo máximo da esfera é de área 10.

P.188 Inscrever um cilindro circular reto de área lateral πa^2 numa esfera de diâmetro $\underline{d}$. Discutir.

III. TESTES.

T.104 (CESCEM - 69) Os pontos médios das arestas de um tetraedro regular de aresta ℓ e volume V são vértices de um:

a) tetraedro regular de aresta $\frac{\ell}{2}$.

b) tetraedro regular de volume $\frac{V}{4}$.

c) octaedro regular de volume $\frac{V}{4}$.

d) octaedro regular de aresta $\frac{\ell}{2}$.

e) Nenhum dos anteriores.

T.105 (EESCUSP - 68) Os centros das seis faces de um cubo são vértices de um octaedro regular. A razão entre o volume do primeiro sólido e do segundo é:

a) $3\sqrt{2}$

b) 4

c) $2\sqrt[3]{5}$

d) 6

e) $5\sqrt{2}$

T.106 (CICE - 70) Sejam C um cubo e S o octaedro cujos vértices são os centros das faces de C. Então o volume de S é:

a) metade do volume de C

b) um terço do volume de C

c) um quarto do volume de C

d) um quinto do volume de C

e) uma outra fração do volume de C.

T.107 (CESCEM - 69) Um tetraedro regular tem aresta ℓ. O número de planos que o interceptam em um trapézio isósceles de bases $\frac{\ell}{3}$ e $\frac{\ell}{2}$ é:

a) 0
b) 3
c) 6
d) 8
e) 12

T.108 (EEUMACK - 69) A razão entre a área de uma superfície esférica e a do cubo circunscrito é:

a) $\frac{\pi}{6}$
b) $\frac{\pi}{3}$
c) $\frac{\pi}{4}$
d) $\frac{\pi}{8}$
e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.109 (FFCLUSP - 67) O volume do cubo circunscrito à esfera de volume unitário é:

a) 4π
b) $\frac{\pi}{6}$
c) $\frac{6}{\pi}$
d) 8π
e) Nenhuma das respostas anteriores

T.110 (FEIUC - 65) Um cubo de aresta <u>a</u> está inscrito numa esfera de raio <u>r</u>. Vale a relação:

a) $a = 2r\sqrt{2}$
b) $a\sqrt{3} = 2r$
c) $a = 2r$
d) $a = \frac{r\sqrt{3}}{3}$
e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.111 (FEIUC - 67) Numa esfera de raio R está inscrito um cubo. Sua aresta mede:

a) $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$
b) $R\sqrt{2}$
c) $\frac{2}{3}R$
d) $R\sqrt{6}$
e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.112 (EEUMACK- 69) Um cubo está inscrito numa esfera de raio R. Sua área total é:

a) $12R^2$
b) $4R^2$
c) $6R^2$
d) $8R^2$
e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.113 (CESCEM - 71) A esfera circunscrita ao octaedro regular de aresta a tem raio igual a:

a) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

b) $a\sqrt{2}$

c) 2a

d) O octaedro regular não é inscritível

e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.114 (EPUSP - 65) Dados uma esfera e seu cilindro circunscrito

a) A área da superfície esférica é igual a área da superfície lateral do cilindro;

b) A área da superfície esférica é igual à área da superfície total do cilindro;

c) O volume da esfera é igual à metade do volume do cilindro;

d) A esfera e o cilindro são sólidos equivalentes;

e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.115 (FEIUC - 68) Sendo S a área de uma superfície esférica e P a área lateral do cilindro circunscrito, tem-se:

a) $S = P$

b) $S < P$

c) $P = 2S$

d) $P = \frac{S\sqrt{3}}{2}$

e) Nenhuma das respostas anteriores

T.116 (EESCUSP - 66) Se V é o volume de uma esfera e V' é o volume do cilindro circular reto circunscrito a esta mesma esfera, então

a) $V = \frac{1}{2} V'$

b) $V = \frac{1}{3} V'$

c) $V = \frac{3}{4} V'$

d) $V = \frac{\sqrt{3}}{3} V'$

e) $V = \frac{2}{3} V'$

T.117 (FFCLUSP - 66) A área de uma esfera, a área total do cilindro equilátero circunscrito a ela e a área total do cone equilátero também circunscrito a essa esfera são proporcionais aos números:

a) 1, 2, 3;

b) 0, 1, $\frac{1}{2}$;

c) 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4};

d) π, π^2, π^3;

e) 4, 6, 9;

T.118 (CICE - 68) Seja S a área total de cilindro equilátero inscrito numa esfera de área T e seja U a área total do cone equilátero inscrito na mesma esfera. Entre S, T, U, existe uma das seguintes relações. Assinale-a.

a) $S + U = T$
b) $T^2 = U \cdot S$
c) $S^2 = U \cdot T$
d) $U^2 = S \cdot T$
e) $S = \frac{1}{2}(U^2 + T^2)$

T.119 (ITA - 68) Uma esfera é colocada no interior de um vaso cônico com $\sqrt{55}$ cm de geratriz e $\sqrt{30}$ cm de altura. Sabendo-se que os pontos de tangência estão a 3 cm do vértice, o raio da esfera vale:

a) $2\sqrt{30}$ cm
b) $\frac{\sqrt{35}}{2}$ cm
c) $\frac{\sqrt{30}}{2}$ cm
d) 3 cm
e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.120 (EELINS - 67) Quer-se inscrever um cone reto de altura h numa esfera de raio R de modo que o volume da esfera seja quatro vêzes o volume do cone. Isto pode ser obtido sòmente para:

a) $h < R$
b) $h = R$
c) $R < h < 2R$
d) $h = \pi R$
e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.121 (ITA - 70) Constroi-se um cone cuja geratriz é tangente a uma esfera de raio r, e cujo eixo passa pelo centro dessa esfera, de modo que sua base esteja situada a uma distância $\frac{r}{2}$ do centro da esfera. O volume do cone é:

a) $\frac{3}{2}\pi r^3$
b) $\frac{1}{3}\pi r^3$
c) $\frac{4}{3}\pi r^3$
d) $\frac{9}{8}\pi r^3$
e) Nenhum dos resultados acima é válido

T.122 (ITA - 70) Um bloco de madeira tem a forma de um paralelepípedo reto, com base quadrada de lado 5 cm e com altura 1 m. Tal bloco tem uma cavidade cilíndrica sendo que o eixo do cilindro que determina a cavidade passa pelo centro do paralelepípedo e faz com o plano da base um ângulo de 45 graus. O cilindro corta ambas as faces do paralelepípedo segundo uma circunferência de raio 1 m. Qual é o volume do bloco?

a) $(75 - \pi)\ m^3$

b) $(25 - 2\pi)\ m^3$

c) $(25 - \frac{\sqrt{2}}{2}\pi)\ m^3$

d) $(25 + \frac{\sqrt{2}}{2}\pi)\ m^3$

e) Nenhum dos resultados acima é válido

T.123 (FFCLUSP - 69) Dadas duas esferas tangentes e de raios respectivamente 1 e 2, o volume do cone reto circunscrito a essas duas esferas é:

a) 16π

b) $32\sqrt{2}\pi$

c) 27π

d) $\frac{64}{3}\pi$

e) 32π

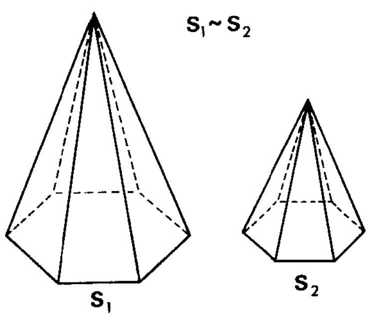
CAPITULO VIII

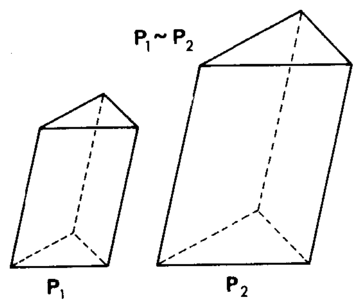
SÓLIDOS SEMELHANTES

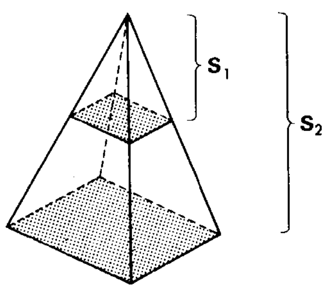
I. SÓLIDOS SEMELHANTES.

I - A. DEFINIÇÕES.

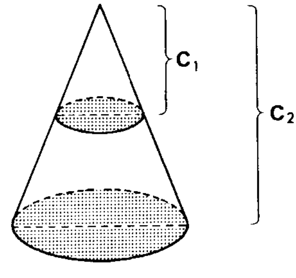
158• Dois sólidos da mesma natureza são chamados *semelhantes*, se e somente se, possuem os elementos homólogos ordenadamente proporcionais.







$S_1 \sim S_2$



$C_1 \sim C_2$

159• RAZÃO DE SEMELHANÇA

É a razão entre dois *elementos lineares homólogos* dos sólidos semelhantes.

Representaremos por <u>k</u> .

Assim, considerando sólidos semelhantes:

a razão entre duas arestas laterais homólogas = k,
a razão entre duas arestas homólogas das bases = k,
a *razão entre as alturas* = k,
a razão entre raios das bases = k,
a razão entre geratrizes homólogas = k, etc.

160• Demonstra-se (usando semelhança entre triângulos) que seccionando-se uma pirâmide ou cone por um plano paralelo ao da base, obtém-se uma nova pirâmide ou cone semelhante à primitiva(o).

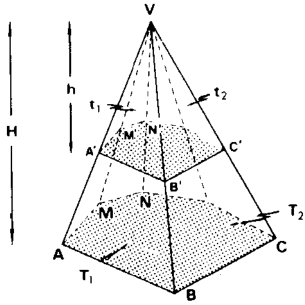
I-B. RAZÃO ENTRE ÁREAS.

161• A razão entre as *áreas das bases* de dois sólidos semelhantes é igual ao *quadrado da razão* de semelhança.

De fato, sendo as bases polígonos semelhantes, em vista do item 68 fica provada a propriedade.

162• A razão entre as *áreas laterais* de dois sólidos semelhantes é igual ao *quadrado da razão* de semelhança.

Demonstraremos que a propriedade é válida para pirâmides semelhantes como exemplo.



Área lateral de VABC ... MN = A_L

Área lateral de VA'B'C' ... M'N' = A_ℓ

VABC ... MN ∿ VA'B'C' ... M'N' =>

=> ΔVAB ∿ ΔVA'B', ΔVBC ∿ ΔVB'C', ...

... , ΔVMN ∿ ΔVM'N', ΔVMA ∿ ΔVM'A' =>

$$\Rightarrow \frac{VA}{VA'} = \frac{VB}{VB'} = \ldots = \frac{VM}{VM'} = \frac{AB}{AB'} = \frac{BC}{B'C'} =$$

$$= \ldots = \frac{MA}{MA'} = \frac{H}{h} = k \qquad \text{razão de semelhança}$$

Sendo:

Área do $\Delta VAB = T_1$ | Área do $\Delta VA'B' = t_1$

Área do $\Delta VBC = T_2$ | Área do $\Delta VB'C' = t_2$

$\vdots$

Área do $\Delta VMA = T_n$ | Área do $\Delta VM'A' = t_n$

temos:

$$\frac{A_L}{A_\ell} = \frac{T_1 + T_2 + \ldots + T_n}{t_1 + t_2 + \ldots + t_n} = \frac{k^2t_1 + k^2t_2 + \ldots + k^2t_n}{t_1 + t_2 + \ldots + t_n} = k^2$$

163• A razão entre as *áreas totais* de dois sólidos semelhantes é igual ao *quadrado da razão* de semelhança.

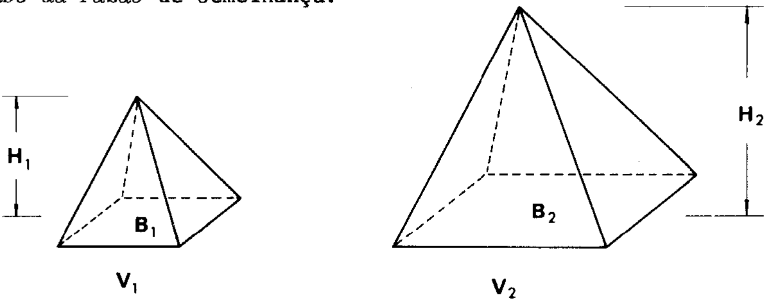
Ainda com pirâmide como exemplo, temos:

$$\frac{A_L}{A_\ell} = k^2 \Rightarrow A_L = k^2 \cdot A_\ell \qquad \frac{A_B}{A_b} = k^2 \Rightarrow A_B = k^2 \cdot A_b$$

$$\frac{A_T}{A_t} = \frac{A_L + A_B}{A_\ell + A_b} = \frac{k^2 A_\ell + k^2 . A_b}{A_\ell + A_b} = k^2$$

I - C. RAZÃO ENTRE VOLUMES.

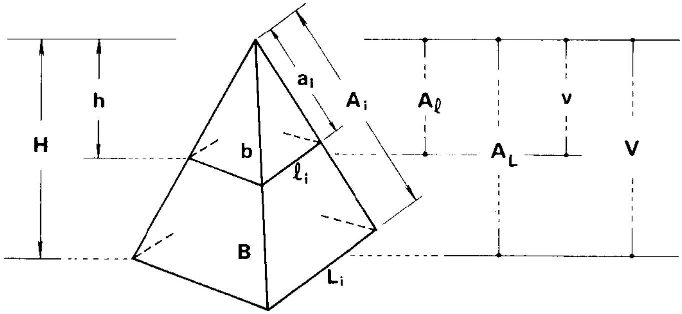
164• A razão entre os *volumes* de dois sólidos semelhantes é igual ao *cubo da razão* de semelhança.



$$\frac{H_1}{H_2} = k \qquad \frac{B_1}{B_2} = k^2$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3} B_1 H_1}{\frac{1}{3} B^2 H^2} = \frac{B_1}{B_2} \cdot \frac{H_1}{H_2} = k^2 \cdot k = k^3$$

Resumo



$$\frac{\ell_i}{L_i} = \frac{h}{H} = \frac{a_i}{A_i} = k \qquad \frac{b}{B} = \frac{A_\ell}{A_L} = \frac{A_t}{A_T} = k^2 \qquad \frac{v}{V} = k^3$$

$$\frac{v}{V} = k^3 \Longrightarrow \frac{v}{V} = k^2 \cdot k \quad \Longrightarrow \frac{v}{V} = \frac{b\ \sqrt{b}}{B\ \sqrt{B}}$$

II. TRONCO DE PIRÂMIDE E TRONCO DE CONE.

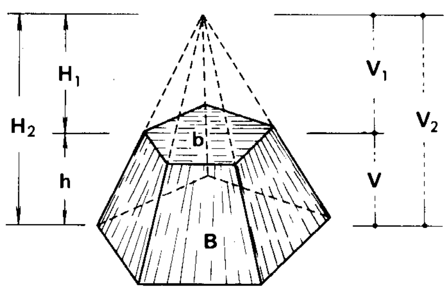
Seccionando-se uma pirâmide (cone) por um plano paralelo à base obtém-se dois sólidos: uma nova pirâmide (cone) e um tronco de pirâmide (cone) de bases paralelas.

165• VOLUMES

1º) Dedução da fórmula que dá o volume do tronco de pirâmide de bases paralelas.

Dados: B, b e h

Pede-se: V



$$\left.\begin{array}{r} V = V_2 - V_1 - \frac{1}{3}BH_2 - \frac{1}{3}bH_1 \\ H_2 = H_1 + h \end{array}\right\} \Longrightarrow V = \frac{1}{3}B(H_1 + h) - \frac{1}{3}b\ H \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad V = \frac{1}{3}\left[Bh + (B - b)\ H_1\right] \qquad (1)$$

Cálculo de H_1 em função dos dados

$$\frac{H_2}{H_1} = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{b}} \Longrightarrow \frac{H_1 + h}{H_1} = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{b}} \Longrightarrow H_1 = \frac{h\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}$$

Substituindo em (1) :

$$V = \frac{1}{3}\left[Bh + (B - b)\frac{h\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}\right] \Longrightarrow V = \frac{h}{3}\left[B + (B - b)\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}\right]$$

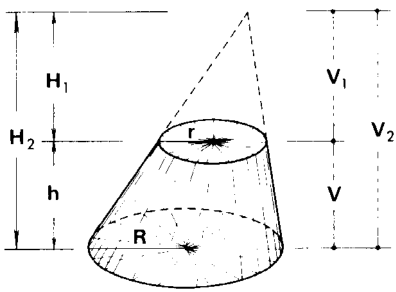
Considerando que: $B - b = (\sqrt{B} + \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{B} - \sqrt{b})$ vem

$$V = \frac{h}{3}\left[B + (\sqrt{B} + \sqrt{b})\sqrt{b}\right] \Longrightarrow \boxed{V = \frac{h}{3}\left[B + \sqrt{Bb} + b\right]}$$

2º) Dedução da fórmula que dá o volume do tronco de cone de bases paralelas

Dados: R, r e h

Pede-se: V



$$\left.\begin{array}{r} V = V_2 - V_1 = \frac{1}{3}\pi R^2 H_2 - \frac{1}{3}\pi r^2 H_1 \\ H_2 = H_1 + h \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow V = \frac{\pi}{3}\left[R^2(H_1 + h) - r^2 H_1\right] \Longrightarrow V = \frac{\pi}{3}\left[R^2 h + (R^2 - r^2) H_1\right] \quad (1)$$

Cálculo de H_1 em função dos dados

$$\frac{H_2}{H_1} = \frac{R}{r} \Longrightarrow \frac{H_1 + h}{H_1} = \frac{R}{r} \Longrightarrow H_1 = \frac{h\,r}{R - r}$$

Substituindo em (1):

$$V = \frac{\pi}{3}\left[R^2 h + (R^2 - r^2)\frac{hr}{R - r}\right] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow V = \frac{\pi h}{3}\left[R^2 + (R + r)(R - r)\frac{r}{R - r}\right] \Longrightarrow \boxed{V = \frac{\pi h}{3}\left[R^2 + Rr + r^2\right]}$$

166• ÁREAS

1º) Dedução das fórmulas que dão a área lateral e a área total de um tronco de pirâmide regular de bases paralelas.

Dados:

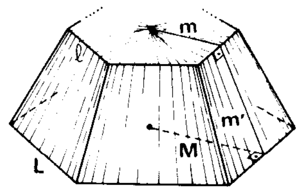
Perímetro da base maior = 2P

Perímetro da base menor = 2p

apótema da base maior = M

apótema da base menor = m

apótema do tronco = m'



Sejam ℓ e L as respectivas medidas dos lados das bases (que supomos terem n lados).

$$A_L = n \cdot A_{Trapézio} \Rightarrow A_L = n \cdot \left(\frac{L+\ell}{2}\right) m' \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow A_L = \frac{n L m'}{2} + \frac{n \ell m'}{2} \Rightarrow A_L = Pm' + pm' \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{A_L = (P+p)\, m'}$$

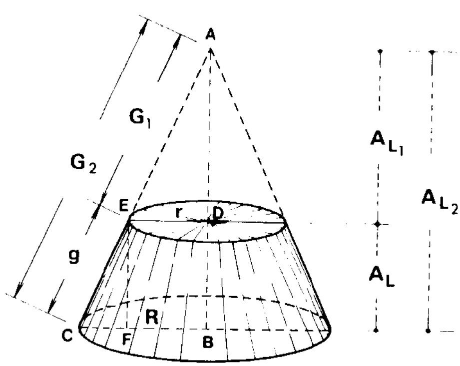
Área total:

$$A_T = A_L + B_B + b_b \Longrightarrow \boxed{A_T = (P+p)m' + PM + pm}$$

2º) Dedução das fórmulas que dão a área lateral e total de um tronco de cone reto de bases paralelas.

Dados: R, r e g

$$G_2 = G_1 + g$$



$$A_L = A_{L_2} - A_{L_1} \Longrightarrow A_L = \pi R G_2 - \pi r G_1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow A_L = \pi R(G_1 + g) - \pi r G_1 \Rightarrow A_L = \pi\left[Rg + (R-r)G_1\right] \quad (1)$$

Cálculo de G_1 em função dos dados.

$$\Delta ADE \sim \Delta EFC \Longrightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{DE}{FC} \Rightarrow \frac{G_1}{g} = \frac{r}{R-r} \Longrightarrow G_1 = \frac{rg}{R-r}$$

Substituindo em (1)

$$A_L = \pi\left[Rg + (R-r)\frac{rg}{R-r}\right] \Longrightarrow \boxed{A_L = \pi(R+r)g}$$

Área total:

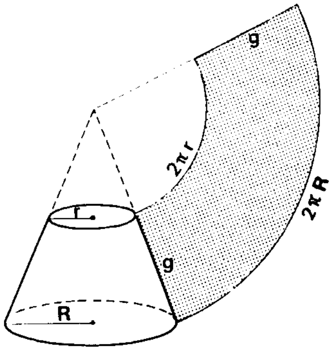
$$A_T = A_L + B + b \Rightarrow A_T = \pi(R+r)g + \pi R^2 + \pi r^2 \Rightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{A_T = \pi\left[R(g+R) + r(g+r)\right]}$$

OBSERVAÇÃO: A dedução acima justifica a propriedade:
A superfície lateral de um tronco de cone reto de raios R e r e geratriz g é equivalente a um trapézio de bases $2\pi R$ e $2\pi r$ e altura g.

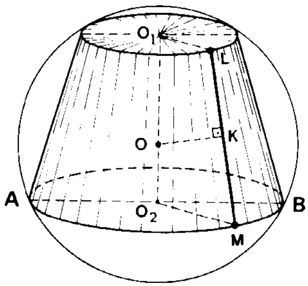
$$A_L = \frac{2\pi R + 2\pi r}{2}\, g$$

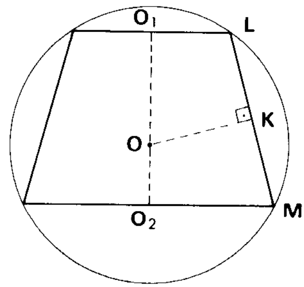
$$\boxed{A_L = \pi\,(R + r)g}$$



III. ESFERA E TRONCOS.

167• Esfera circunscrita a tronco de cone reto de bases paralelas.





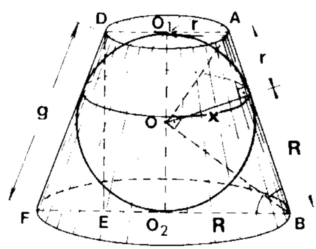
OK é mediatriz da geratriz LM.

Os problemas recaem em circunferência circunscrita a trapézio isósceles.

168• Esfera inscrita em tronco de cone reto de bases paralelas.

Condição para o tronco de cone ser circunscritível a uma esfera

$$\boxed{g = R + r}$$



Sendo x o raio da esfera, do triângulo retângulo AOB vem

$$\boxed{x^2 = R \cdot r}$$

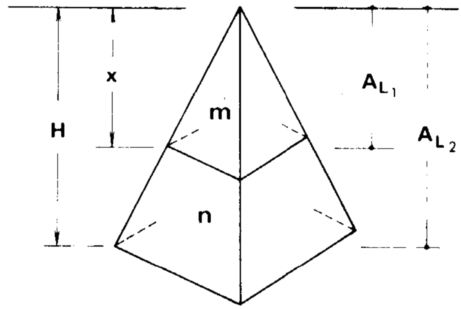
Esta conclusão também pode sair do $\triangle DEF$.

169• ESFERA E TRONCO DE PIRÂMIDE

Em problemas que envolve circunscrição ou inscrição de esfera em tronco de pirâmide deve-se primeiro considerar um tronco de cone inscrito ou circunscrito no tronco de pirâmide e depois trabalhar com o tronco de cone e a esfera.

3º) a razão entre as áreas laterais da nova pirâmide (cone) e do tronco obtido seja $\frac{m}{n}$?

SOLUÇÃO



$$\frac{A_{L_1}}{A_{L_2} - A_{L_1}} = \frac{m}{n} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow nA_{L_1} = mA_{L_2} - mA_{L_1} \Longrightarrow$$

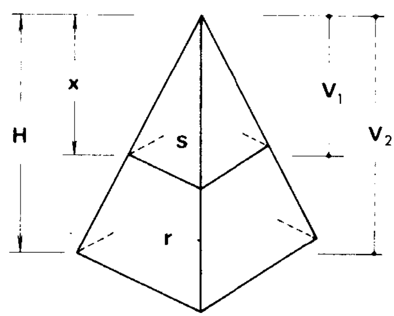
$$\Longrightarrow (m+n)A_{L_1} = mA_{L_2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{A_{L_1}}{A_{L_2}} = \frac{m}{m+n}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{A_{L_1}}{A_{L_2}} = \dfrac{m}{m+n} \\ \dfrac{A_{L_1}}{A_{L_2}} = \left(\dfrac{x}{H}\right)^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{x}{H} = \sqrt{\frac{m}{m+n}} \Longrightarrow x = H\sqrt{\frac{m}{m+n}}$$

RESPOSTA: $H\sqrt{\frac{m}{m+n}}$

4º) a razão entre os volumes do tronco obtido e da nova pirâmide (cone) seja $\frac{r}{s}$?



$$\frac{V_2 - V_1}{V_1} = \frac{r}{s} \Longrightarrow$$

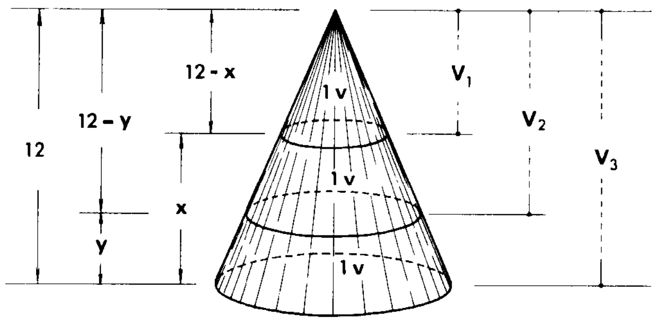
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{s}{r+s}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{s}{r+s} \\ \dfrac{V_1}{V_2} = \left(\dfrac{x}{H}\right)^3 \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{x}{H} = \sqrt[3]{\frac{s}{r+s}} \Longrightarrow x = H\cdot\sqrt[3]{\frac{s}{r+s}}$$

RESPOSTA: $H\cdot\sqrt[3]{\frac{s}{r+s}}$

R.74 A que distâncias das bases de um cone de 12 m de altura devemos passar dois planos paralelos à base para que o sólido fique dividido em três partes equivalentes?

SOLUÇÃO



$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{V_1}{V_3} = \dfrac{1}{3} \\[2ex] \dfrac{V_1}{V_3} = \left(\dfrac{12 - x}{12}\right)^3 \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{12 - x}{12} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \Longrightarrow 12 - x = 4\sqrt[3]{9} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x = 4\,(3 - \sqrt[3]{9})$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{V_2}{V_3} = \dfrac{2}{3} \\[2ex] \dfrac{V_2}{V_3} = \dfrac{12 - y}{12} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{12 - y}{12} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}} \Rightarrow 12 - y = 4\sqrt[3]{18} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y = 4\,(3 - \sqrt[3]{18})$$

RESPOSTA: $4(3 - \sqrt[3]{9})$ m e $(3 - \sqrt[3]{18})$ m

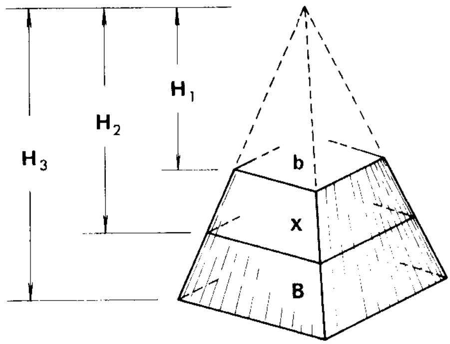
P.75 (EEMACK - 60) Corta-se o tronco de pirâmide de bases paralelas por uma plano paralelo às bases e cuja relação das distâncias a essas bases é m:n. Achar a área da secção, conhecendo as áreas B e b do tronco.

SOLUÇÃO

$$\frac{H_2 - H_1}{H_3 - H_2} = \frac{m}{n} \qquad (1)$$

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{x}} \implies H_1 = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{x}} H_2$$

$$\frac{H_3}{H_2} = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{x}} \implies H_3 = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{x}} H_2$$



Substituindo H_1 e H_3 em (1)

$$\frac{H_2 - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{x}} H_2}{\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{x}} H_2 - H_2} = \frac{m}{n} \implies \frac{\sqrt{x} - \sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{x}} = \frac{m}{n} \implies$$

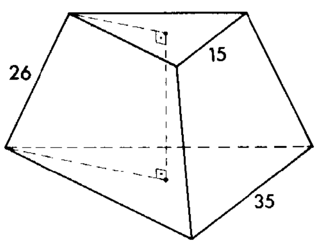
$$\implies n\sqrt{x} - n\sqrt{b} = m\sqrt{B} - m\sqrt{x} \implies (m+n)\sqrt{x} = m\sqrt{B} + n\sqrt{b} \implies$$

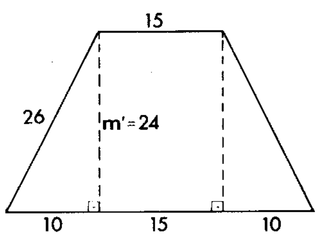
$$\implies \sqrt{x} = \frac{m\sqrt{B} + n\sqrt{b}}{m+n} \implies x = \frac{m\sqrt{B} + n\sqrt{b}^{\,2}}{m+n}$$

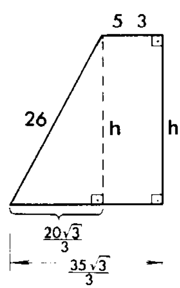
RESPOSTA: $\dfrac{m\sqrt{B} + n\sqrt{b}}{m+n}$

R.76 Um tronco de pirâmide regular tem como bases triângulos equiláteros cujos lados medem respectivamente 35 cm e 15 cm. A aresta lateral mede 26 cm. Calcular a área lateral, a área total e o volume dêste tronco.

SOLUÇÃO







1º) Área lateral

$$A_L = 3 \cdot A_{trapézio} \implies A_L \doteq 3 \cdot \frac{35 + 15}{2} \quad 24 \implies A_L = 1800$$

2º) Área total

$$A_T = A_L + B + b \implies A_T = 1800 + \frac{15^2\sqrt{3}}{4} + \frac{35^2\sqrt{3}}{4} \implies$$

$$\Longrightarrow A_T = 1800 + \frac{725\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow A_T = \frac{25}{2}(144 + 29\sqrt{3})$$

3º) Volume

Cálculo da altura: $h^2 = 26^2 - \left(20\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Longrightarrow h^2 = \frac{4884}{9} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow h = \frac{2\sqrt{1221}}{3}$$

$$V = \frac{h}{3}\left[B + \sqrt{Bb} + b\right] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow V = \frac{2\sqrt{1221}}{9}\left[\frac{1225\sqrt{3}}{4} + \frac{525\sqrt{3}}{4} + \frac{225\sqrt{3}}{4}\right]$$

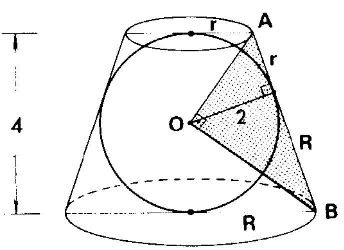
$$V = \frac{2\sqrt{1221}}{9} \cdot \frac{1975\sqrt{3}}{4} \Longrightarrow V = \frac{1975\sqrt{407}}{6}$$

RESPOSTA: $A_L = 1800\ cm^2$ $A_T = \frac{25}{2}(144 + 29\sqrt{3})\ cm^2$ e

$$V = \frac{1975\sqrt{407}}{6}\ cm^3$$

R.77 (FAMACK - 67) Num tronco de cone de revolução é inscrita uma esfera. Sendo o raio da esfera de 2 cm, quais devem ser os raios das bases do tronco, para que o volume do tronco de cone seja o dôbro do volume da esfera?

SOLUÇÃO



Do triângulo AOB vem:

$R \cdot r = 4$ (1)

$V_{tronco} = 2 \cdot V_{esfera} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \frac{\pi 4}{3}(R^2 + R \cdot r + r^2) =$

$= 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow R^2 + \underset{\overset{\parallel}{4}}{Rr} + r^2 = 16 \Longrightarrow R^2 + r^2 = 12$ (2)

De (1) e (2) vem:

$$\left.\begin{array}{l} R^2 + r^2 + 2Rr = 20 \Longrightarrow R + r = 2\sqrt{5} \\ R^2 + r^2 - 2Rr = 4 \Longrightarrow R - r = 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow R = \sqrt{5} + 1 \quad e \quad r = \sqrt{5} - 1$$

RESPOSTA: $\sqrt{5} + 1$ e $\sqrt{5} - 1$

V. PROBLEMAS PROPOSTOS.

P.189 (ITA - 56) A base de uma pirâmide tem 225 m^2 de área. A $\frac{2}{3}$ do vértice corta-se a pirâmide por um plano paralelo à base. Achar a área da secção.

P.190 Uma pirâmide tem altura h e área da base $\underline{B}$. A que distância do vértice deve ser conduzido um plano paralelo à base, para que a área da secção seja $\underline{b}$?

P.191 (EEMACK - 65) Mostrar que, seccionando-se um cone de altura h, por um plano paralelo à base e a uma distância $\underline{m}$ do vértice, a razão entre as áreas da secção e da base é $\frac{m^2}{h^2}$.

P.192 (FFCLUSP - 55) Dividir a superfície lateral de um cone de revolução em 2 partes equivalentes por um plano paralelo à base do cone.

P.193 (ITA - 57) A que distância do vértice devemos cortar um cone de revolução, por um plano paralelo à base, de modo que o volume do cone destacado seja $\frac{1}{8}$ do volume do primeiro cone?

P.194 (FFCLUSP - 57) Dado um cone circular reto, a que distância do vértice se deve traçar um plano paralelo à base de modo que o volume do tronco, assim determinado, seja metade do volume do cone dado.

P.195 Cortar uma pirâmide de altura $\underline{h}$ por um plano paralelo à base, de modo que o volume da pirâmide menor seja $\frac{1}{8}$ do volume do tronco.

P.196 Num cone de revolução a geratriz tem $\underline{g}$ cm e a área da base B cm^2. Calcular a área de uma secção feita a $\underline{t}$ cm do vértice.

P.197 O volume de uma pirâmide é V e a aresta lateral é ℓ. Achar um ponto da aresta, tal que, o plano paralelo à base, por êle, determine uma pirâmide de volume V'.

P.198 (ITA - 62) Uma pirâmide tem o volume V = 15 dm^3 e uma de suas arestas (laterais) mede 32 cm. Pelo ponto A (dessa aresta lateral), à distância de 4 cm do vértice da pirâmide, conduz-se o plano paralelo à base (da pirâmide). Calcular o volume de cada um dos sólidos obtidos por êsse plano.

P.199 Uma pirâmide triangular regular tem de aresta lateral 10 dm e para apótema da base 3 dm. Corta-se essa pirâmide por um plano paralelo à base e cuja distância ao vértice é 4 dm. Calcular o volume do tronco de pirâmide obtido.

P.200 Dada uma pirâmide de 12 metros de altura, a que distância do vértice devemos passar dois planos paralelos à base para que se tenham três volumes iguais?

P.201 A que distância do vértice de uma pirâmide estão situadas duas secções feitas por planos paralelos à base da pirâmide, cujas áreas são $49m^2$ e $64\ m^2$, respectivamente, e sendo 30 m a distância entre elas?

P.202 (EPUSP - 67) A altura de uma pirâmide é dividida em seis partes iguais e pelos pontos de divisão são traçados planos paralelos à base. Sabendo que a área da base é 360, determinar a soma das áreas das cinco secções da pirâmide pelos referidos planos.

P.203 Como deve ser dividida a altura de uma pirâmide, paralelamente à base, para obter duas partes de volumes iguais? Generalizar para $\underline{n}$ partes equivalentes.

P.204 (EESCUSP - 58) É dado o cone circular reto cujo raio da base tem comprimento $\underline{r}$ e cujo apótema faz com o plano da base um ângulo de 60^o. Determinar a que distância do vértice deve ser traçado um plano paralelo à base para que a área total do tronco de cone, assim determinado, seja igual a $\frac{7}{8}$ da superfície total do cone.

P.205 A área lateral de uma pirâmide regular de base quadrada é $240\ m^2$. O comprimento do lado da base é $\frac{3}{2}$ da altura. Conduz-se um plano paralelo ao plano da base; a secção está a $\frac{1}{4}$ da altura, a partir do vértice. Qual a área da secção?

P.206 (FFCLUSP - 55) A que distância do vértice de um cone circular reto de raio R e geratriz g se deve passar um plano paralelo à base de modo que a área da secção seja igual à da superfície lateral do cone?

P.207 (EEMAUÁ - 67) Dado um tronco de cone reto, cuja altura é igual a 3m e cujas base têm raios 4m e 1m, respectivamente, pede-se dividir êsse tronco de cone por um plano paralelo às bases, de maneira que o volume da parte adjacente à base maior seja equivalente a 8 vezes o volume da outra parte.

P.208 Conhecidos os raios $\underline{r}$ e $\underline{R}$ das bases de um tronco de cone de bases paralelas, determinar o raio de uma secção paralela às bases, tal que divida o tronco em duas partes cujos volumes estão na razão a:b.

P.209 Seciona-se um tronco de pirâmide de bases paralelas por um plano paralelo às bases de modo que a razão entre os volumes dos sólidos obtidos é $\frac{p}{q}$. Achar a área da secção, conhecendo-se as áreas B e b das bases do tronco.

P.210 (EEMAUÁ - 62) Um líquido é colocado, utilizando-se uma torneira, dentro de um funil cônico à razão de 136π cm^3/s e escôa à razão de 100π cm^3/s. A altura H do funil é de 100 cm e o raio da bôca é de 10 cm. Determinar a altura do líquido no funil após 2 s da abertura da torneira.

P.211 É dado um cone circular reto de altura 8 dm. Corta-se-o por um plano paralelo à base, a uma distância 3 dm do vértice. Inscreve-se no tronco de cone que resulta um tronco de pirâmide hexagonal, sabendo que o raio da base menor do tronco de cone é 1 dm, calcular o volume do tronco de pirâmide inscrito.

P.212 (EEMACK - 64) "Dado um tronco de cone de altura H e de bases tendo raios r e R, determinar a geratriz do cone de onde foi obtido o tronco de cone dado".

P.213 Dadas as medidas B, B', h das áreas das bases e da altura, respectivamente, de um tronco de pirâmide, determinar a altura da pirâmide da qual se obteve o tronco.

P.214 Sôbre uma mesma base de área B constroem-se um prisma e uma pirâmide com volumes V_1 e V_2. Determinar a área da secção da pirâmide com a base superior do prisma.

P.215 Determinar o apótema de um tronco de cone de bases paralelas, sabendo que a soma de suas circunferências equivale à circunferência de um círculo de raio $\underline{R}$ e que a superfície lateral equivale à superfície dêsse círculo.

P.216 (FAUUSP - 70) Um cilindro e um tronco de cone (circulares retos) têm uma base comum e mesma altura. O volume do tronco é a metade do volume do cilindro. Determinar a razão entre o raio da base maior e o raio da base menor do tronco.

P.217 (FAUUSP - 57) Os raios das bases de um tronco de cone medem, respectivamente, 4 cm e 6 cm. Calcular a altura dêsse tronco, sabendo-se que a área lateral é igual à soma das áreas das bases.

P.218 (ITA - 1958) Um tronco de cone reto tem bases circulares de raios $\underline{R}$ e $\underline{r}$. Qual a altura para que a superfície lateral seja igual à soma das superfícies das bases?

P.219 (ITA - 63) Um cone equilátero está inscrito numa esfera de raio igual à 4 m. Determinar à que distância do centro da esfera deve-se traçar um plano paralelo à base do cone, para que a diferença das secções (na esfera e no cone) seja igual a área da base do cone.

P.220 (EEMACK - 66) Sôbre base comum foram construídos dois cones retos (um dentro do outro). O raio da base é $\underline{R}$. Um plano paralelo à base, que passa pelo vértice do cone menor, intercepta o cone maior segundo um círculo de raio $\underline{r}$. A altura do cone menor é $\underline{h}$. Achar o volume do sólido compreendido entre as superfícies laterais desses dois cones.

P.221 (FEIUC - 65) Calcular o volume da esfera inscrita num tronco de cone circular reto cujos raios das bases medem 1 m e 4 m respectivamente.

P.222 (EEMAUÁ - 67) Que relação deve existir entre os raios das bases e a altura de um tronco de cone reto para que o mesmo seja circunscirtível a uma esfera?

P.223 (FFCLUSP - 55) Calcular o volume de um tronco de cone de bases paralelas, circunscrito a uma esfera de raio $\underline{R}$, sabendo-se que a geratriz do tronco é $\underline{3R}$.

P.224 (FAMACK - 68) Deduzir a fórmula do volume do tronco de pirâmide, que se obtém seccionando-se uma pirâmide de altura H por um plano paralelo a base da pirâmide, e a uma distância $\underline{h}$ da mesma.

P.225 Calcular o êrro que se comete tomando para volume de um tronco de pirâmide o produto da semi-soma das áreas das bases pela altura.

P.226 Qual o volume de um tronco de pirâmide regular hexagonal, de aresta lateral 5 m, cujas áreas das bases medem respectivamente.

$$54\sqrt{3}\ m^2 \quad e \quad 6\sqrt{3}\ m^2\ ?$$

P.227 Os diâmetros das bases de um tronco de cone de revolução são, respectivamente, 22 m e 4 m. Qual o diâmetro de um cilindro de mesma altura do tronco e de mesmo volume?

P.228 Dados os lados $\underline{a}$ e $\underline{b}$ das bases quadradas de um tronco de pirâmide, determinar a altura do tronco, considerado regular, de modo que a área lateral seja igual à soma das áreas das bases.

P.229 (FFCLUSP - 55) Se a altura de um tronco de cone é igual a quatro vêzes a diferença dos raios das bases, o volume dêsse tronco é igual à diferença dos volumes de duas esferas cujos raios são os raios das bases do tronco de cone.

P.230 (FAUUSP - 62) Numa secção plana feita a uma distância de 2 m do centro de uma esfera, está inscrito um triângulo equilátero de área $3\sqrt{3}\ m^2$. Determinar o volume do tronco de cone circular cujas bases são a secção referida e a secção diametral que lhe é paralela.

P.231 Dá-se a altura $\underline{h}$ de uma pirâmide regular de base quadrada e construe-se sôbre a base um cubo, de modo que a face oposta à base corte a pirâmide num quadrado de lado $\underline{a}$. Calcular o lado da base da pirâmide.

P.232 (FEIUC - 56) Em um tronco de cone de revolução, os raios das bases e a altura medem, respectivamente, $\underline{r}$, $\underline{2r}$, $\underline{4r}$.

1) Achar a área lateral do tronco;
2) A que distância $\underline{x}$ da base maior se deve fixar um ponto V, sôbre o eixo do cone de modo que sejam iguais as áreas laterais dos dois cones, tendo V por vértice e por bases as do tronco.

P.233 (EESCUSP - 65) Consideremos a pirâmide regular SABC de altura H, tendo por base o triângulo equilátero ABC de lado a. Seja r o raio do círculo inscrito nêsse triângulo.

A que distância x do vértice devemos seccionar a pirâmide por um plano paralelo à base de modo que a área da secção A'B'C' seja igual a área do círculo inscrito em ABC?

VI. TESTES.

T.124 (EESCUSP - 66) Tem-se dois vasilhames, *geomètricamente semelhantes*. O primeiro é uma garrafa das de vinho, cuja altura é 27 cm. O segundo é uma miniatura do primeiro, usado como propaganda do produto, e cuja altura é 9 cm. Quantas vezes seria preciso esvasiar o conteúdo da miniatura na garrafa comum, para enchê-la completamente?

a) 3 vêzes
b) 9 vêzes
c) 18 vêzes
d) 27 vêzes
e) 36 vêzes

T.125 (CICE - 68) Se a razão entre os volumes de dois cubos dados é $\frac{1}{5}$, qual a razão entre as suas arestas?

a) $\sqrt{5}$
b) $\frac{1}{5}$
c) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$
d) $\frac{\sqrt[3]{5}}{5}$
e) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

T.126 (EELINS - 67) Um cone tem h cm de altura e sua base, 54 cm^2 de área. À distância $\frac{h}{3}$ cm do vértice do cone traça-se um plano paralelo à sua base. A área da secção que o plano determina o cone é:

a) 9 cm^2
b) 6 cm^2
c) 18 cm^2
d) 3π cm^2
e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.127 (EESCUSP - 66) Dividindo-se uma pirâmide de altura a com plano paralelo ao da base, à distância x do vértice, obtêm-se duas partes de áreas laterais iguais. O valor de x é:

a) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{a}{2}$

c) $\frac{3a}{2}$

d) $\frac{(2+\sqrt{2})\,a}{2}$

e) Nenhum dêsses valores

T.128 (ITA - 67) Cortando-se uma pirâmide regular de altura $\underline{h}$, com plano paralelo à base, resulta uma segunda pirâmide. Se a razão entre as áreas das superfícies laterais das pirâmides for $\underline{r}$, a que distância do vértice deve passar o plano?

a) $h^2 r$

b) $h\sqrt{r}$

c) $r\sqrt{h}$

d) $\frac{\sqrt{r}}{h}$

e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.129 (CESCEM - 70) Consideremos um cone reto de altura $\underline{H}$. Queremos cortá-lo por um plano paralelo à base à distância $\underline{h}$ do vértice e tal que o cone obtido e o tronco de cone tenham mesmo volume. Então $\frac{h}{H}$ vale:

a) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$

e) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

T.130 (FFCLUSP - 66) Se seccionarmos uma pirâmide de base S e altura h, por um plano paralelo à base, distante $\underline{x}$ do plano da base, então, se S' é a área da secção plana obtida, vale a seguinte relação:

a) $\frac{S'}{S} = \frac{x^2}{h^2}$

b) $\frac{S'}{S} = \frac{(h-x)^2}{h^2}$

c) $\frac{S'}{x} = \frac{S}{h}$

d) $SS' = h(h-x)$

e) Nenhuma das afirmações anteriores

T.131 (CICE - 68) A que distância do vértice se deve fazer passar um plano paralelo à base de uma pirâmide de altura H para que ela fique dividida em dois sólidos de igual volume? Assinale a resposta certa.

a) $\dfrac{H}{\sqrt[3]{2}}$

b) $\dfrac{H}{2}$

c) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}H$

d) $\dfrac{H}{2 + H}$

e) $\dfrac{H^2 + 1}{\sqrt{2}}$

T.132 (FFCLUSP - 69) A relação entre as áreas das bases b e B de um tronco de pirâmide de bases paralelas é $\frac{1}{4}$. Qual a relação entre seu volume e altura?

a) $\frac{5}{2}$ de b;

b) $\frac{5}{3}$ de b;

c) $\frac{7}{2}$ de b;

d) $\frac{7}{3}$ de b;

e) 7b.

T.133 (CICE - 70) Considere uma pirâmide de volume V e altura h. O plano paralelo à base que destaca nessa pirâmide um tronco de volume cV tal que $0 < c < 1$,

a) dista $\frac{1}{2}$ ch do vértice

b) dista $(1 - c)h$ da base

c) dista $(1 - \sqrt{1 - c})h$ da base

d) dista $(1 - \sqrt[3]{1 - c})h$ da base

e) não tem nenhuma dessas propriedades.

T.134 (FEIUC - 66) Os vértices de um tetraedro regular coincidem com os centros das faces de um outro tetraedro regular. A razão dos volumes desses dois sólidos é:

a) 2

b) 4

c) 8

d) 27

e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.135 (FFCLUSP - 66) Sejam T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, pirâmides de bases quadradas com a seguinte propriedade: o lado da base e a altura de T_i são iguais ao dôbro das medidas correspondentes de T_{i+1}, $i = 1, 2, 3, 4$. A soma dos volumes das cinco pirâmides é:

a) $\frac{(2^{15} - 1)}{7}$ vezes o volume de T_5

b) $\frac{(2^{15} - 1)}{7}$ vezes o volume de T_1

c) $\frac{(2^{15} - 1)}{15}$ vezes o volume de T_5

d) $\frac{(2^{15} + 1)}{7}$ vezes o volume de T_5

e) Nenhuma das afirmações anteriores é correta.

T.136 (EESCUSP - 68) Qual das expressões abaixo dão volume do tronco de cone circular de bases paralelas em função de H, R, h, r (figura abaixo).

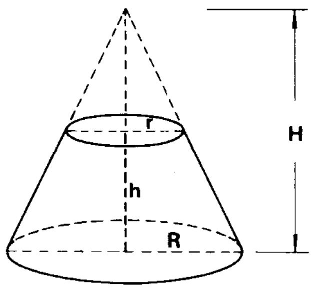
a) $\frac{1}{3}\pi\left[HR^2 + (H-h)r^2\right]$

b) $\frac{1}{3}\pi\left[HR^2 - (H+h)r^2\right]$

c) $\frac{1}{3}\pi\left[HR^2 - (H-h)r^2\right]$

d) $\frac{1}{3}\pi\left[HR^2 + (H+h)r^2\right]$

e) Nenhuma das precedentes respostas é exata.



T.137 (CICE - 70) Um reservatório cilíndrico C contém um líquido até o nível H. Êste líquido cabe todo num reservatório tronco cônico T, de altura igual a $\frac{3}{7}$H e menor raio igual ao raio de C, se e só se a razão do raio maior para o raio menor de T

a) é $\geqslant 2$

b) é $\geqslant \frac{3}{7}$

c) é $> \frac{7}{3}$

d) é $\geqslant \frac{9}{49}$

e) é outra

T.138 (ITA - 71) Dado um cone reto de geratriz g e altura h, calcular a que distância do vértice deveremos passar um plano paralelo à base, a fim de que a secção obtida seja equivalente à área lateral do tronco formado.

a) $\sqrt{g(g-h)}$

b) $\sqrt{g(g-\sqrt{g^2 - h^2})}$

c) $\sqrt{g^2 - \sqrt{g^2 - h^2}}$

d) $\sqrt{h^2 - g\sqrt{g^2 - h^2}}$

e) Nenhuma das respostas anteriores.

CAPÍTULO IX

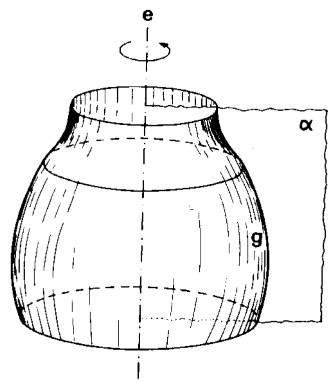
SUPERFÍCIES E SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

I. SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO.

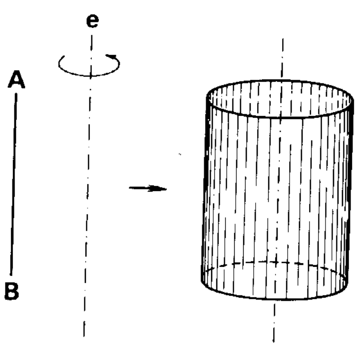
170• DEFINIÇÃO

Consideremos um semi-plano de origem e (eixo) e nêle uma linha g (geratriz); girando êste semi-plano em tôrno de e, a linha g gera uma superfície que é chamada superfície de revolução.

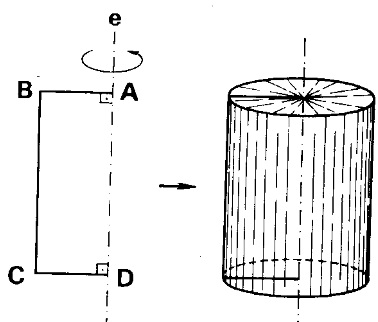
Salvo aviso em contrário, considera-se revolução completa (de 360° em tôrno do eixo).



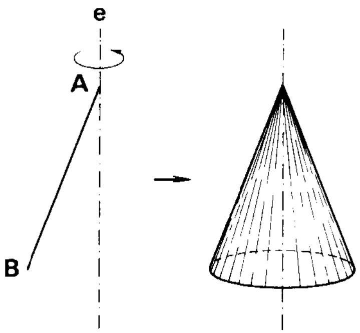
EXEMPLOS



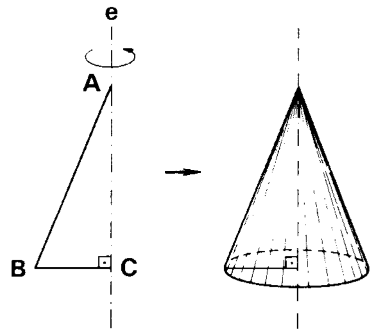
O segmento AB gera a superfície lateral de um cilindro (superfície de revolução).



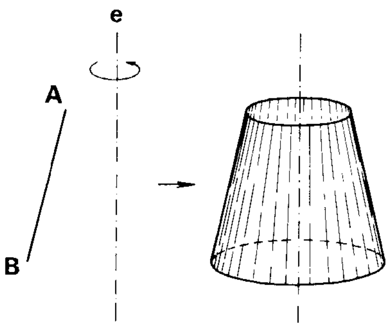
A poligonal ABCD gera a superfície total de um cilindro (superfície de revolução).



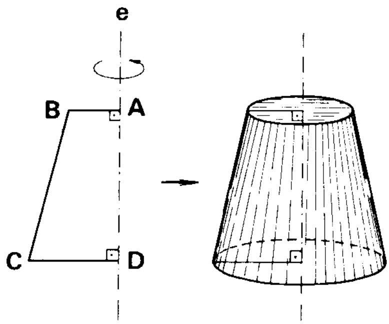
O segmento AB gera a superfície lateral de um cone (superfície de revolução)



A poligonal ABC gera a superfície total de um cone (superfície de revolução).



O segmento AB gera a superfície lateral de um tronco de cone (superfície de revolução).



A poligonal ABCD gera a superfície total de um tronco de cone (superfície de revolução).

171• ÁREA

O cálculo da área de uma superfície de revolução pode ser feito de dois modos:

Primeiro modo.

Usando as expressões de áreas lateral e total que conhecemos (do cilindro, do cone, do tronco de cone, etc.)

Segundo modo.

Usando a fórmula

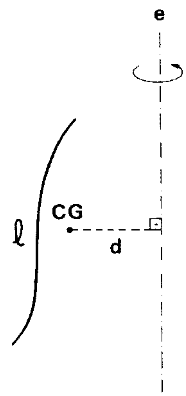
$$\boxed{A = 2\,\pi\,\ell\,d}$$

onde

A é a área da superfície gerada.

ℓ é o comprimento da geratriz.

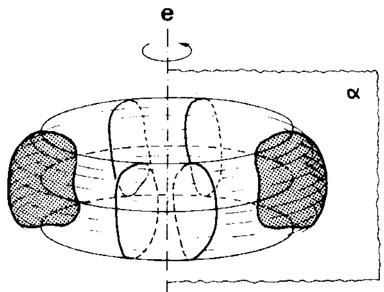
d é a *distância do centro de gravidade da geratriz ao eixo.*

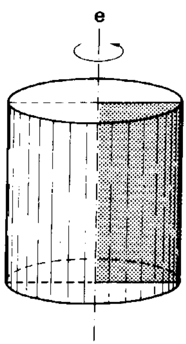


II. SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO.

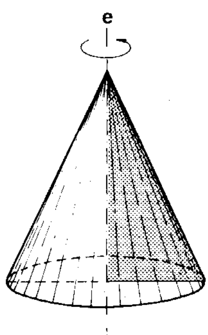
172• DEFINIÇÃO

Consideremos um semi-plano de origem e (eixo) e nêle uma superfície S ; girando o semi-plano em tôrno de e, a superfície S gera um sólido chamado sólido de revolução.

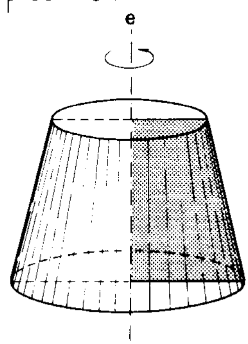




Retângulo gerando cilindro de revolução.



Triângulo retângulo gerando cone de revolução.



Trapézio retângulo gerando tronco de cone de revolução.

Outros exemplos de sólidos de revolução, assim como de superfícies de revolução aparecerão no próximo capítulo.

173• VOLUME

O cálculo do volume de um sólido de revolução pode ser feito de dois modos.

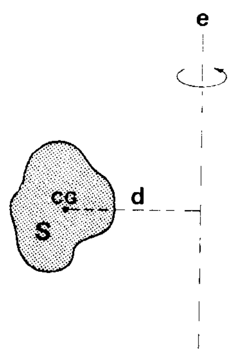
Primeiro modo

Usando as expressões dos volumes dos sólidos (cilindro, cone, tronco de cone, etc.)

Segundo modo

Usando a fórmula

$$\boxed{V = 2\,\pi\,S\,d}$$



onde

V é o volume do sólido gerado

S é a área da superfície geradora

d é a *distância do centro de gravidade da superfície ao eixo.*

Observação importante

As fórmulas $A = 2\,\pi\ell d$ e $V = 2\,\pi Sd$ (fórmulas Pappus-Guldin) só devem ser aplicadas quando o centro de gravidade da geratriz fôr de fácil determinação e o <u>d</u> não apresentar dúvidas; caso contrário, usam-se os primeiros modos para se obter área e volume de sólidos de revolução.

174• Exemplos de utilização das fórmulas $A = 2\,\pi\ell d$ e $V = 2\,\pi Sd$

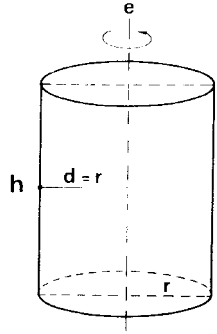
1º) Área lateral do cilindro de revolução.

$A = 2\,\pi\ell d$

$\ell = h$ e $d = r$

$A_L = 2\,\pi hr \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \boxed{A_L = 2\,\pi rh}$



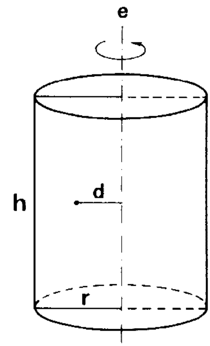
2º) Volume do cilindro de revolução.

$V = 2\ \pi S d$

$S = r \cdot h \quad e \quad d = \frac{1}{2} r$

$V = 2\pi \cdot rh \cdot \frac{1}{2} r \implies$

$\implies \boxed{V = \pi r^2 h}$



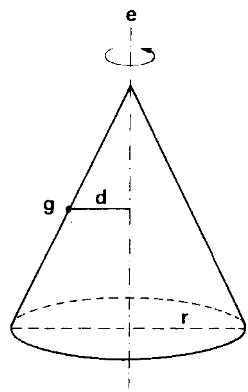
3º) Área lateral de um cone de revolução.

$A = 2\ \pi \ell d$

$\ell = g \quad e \quad d = \frac{1}{2} r$

$A_L = 2\pi \cdot g \cdot \frac{1}{2} r \implies$

$\implies \boxed{A_L = \pi r g}$



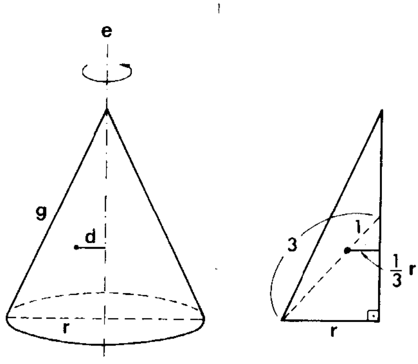
4º) Volume de um cone de revolução.

$V = 2\ \pi S d$

$S = \frac{1}{2} rh \quad e \quad d = \frac{1}{3} r$

$V = 2\pi \cdot \frac{1}{2} rh \cdot \frac{1}{3} r \implies$

$\implies \boxed{V = \frac{1}{3} \pi r^2 h}$

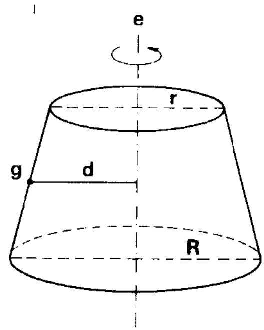


5º) Área lateral do tronco de cone de revolução.

$A = 2\ \pi \ell d$

$A_L = 2\ \pi g . \frac{R + r}{2} \implies$

$\implies \boxed{A_L = \pi (R + r)\ g}$



NOTA: O volume de um tronco de cone de revolução não é calculado por $V = 2\,\pi S d$ em vista do exposto na observação acima.

6º) Determinação do centro de gravidade de uma semi-circunferência.

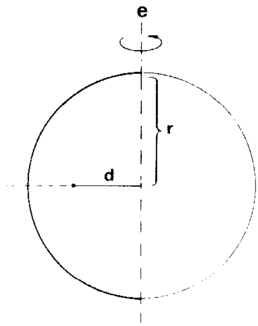
$A = 2\,\pi \ell d$

com $A = 4\,\pi r^2$, $\ell = \pi r$

obtemos d

$4\pi r^2 = 2\pi \cdot \pi r\, d \implies$

$\implies \boxed{d = \frac{2}{\pi} r}$

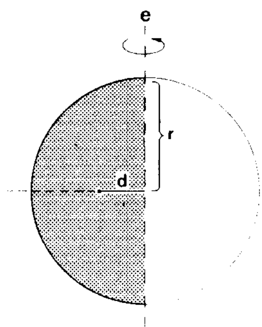


7º) Determinação do centro de gravidade de um semi-círculo.

$V = 2\,\pi S d$

$\frac{4}{3}\pi r^3 = 2\pi \cdot \frac{\pi r^2}{2} \cdot d \implies$

$\implies \boxed{d = \frac{4}{3\pi} r}$

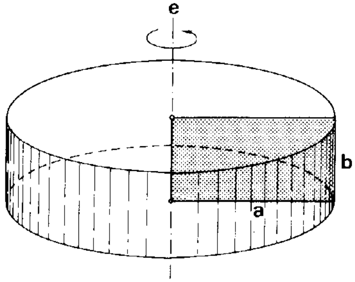


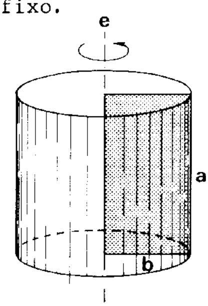
III. PROBLEMAS RESOLVIDOS.

R.78 Os volumes dos cilindros gerados por um retângulo que gira em tôrno de cada lado, são inversamente proporcionais aos lados fixos.

SOLUÇÃO

Sejam a e b os lados do retângulo e V_a e V_b os respectivos volumes dos cilindros gerados quando a ou b é fixo.





$$V_b = \pi a^2 b \Rightarrow \frac{V_b}{a} = \pi\ ab \qquad V_a = \pi b^2 a \Rightarrow \frac{V_a}{b} = \pi\ ab$$

$$\frac{V_b}{a} = \frac{V_a}{b} \Longrightarrow a \cdot V_a = b \cdot V_b$$

R.79 O volume de um cone de revolução é igual a $\frac{1}{3}$ do produto da área do triângulo gerador pela circunferência da base do cone.

SOLUÇÃO

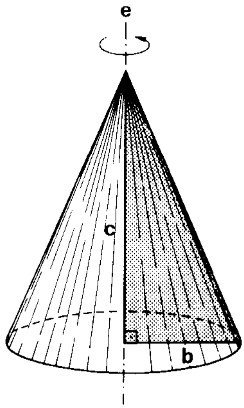
$$V_c = \frac{1}{3}\pi b^2 c \overset{*}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow V_c = \frac{1}{3} \cdot bc \cdot \pi b \overset{*}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow V_c = \frac{1}{3} \cdot \frac{bc}{2} \cdot 2\pi b$$

área do triângulo — circunferência da base

(*) artifícios



R.80 Dado um triângulo retângulo de catetos b e c e hipotenusa a,

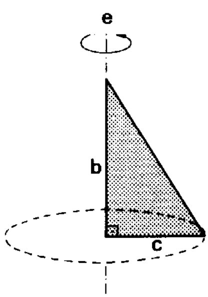
1º) Calcular os volumes dos sólidos gerados quando o triângulo gira em tôrno de b (V_b), em tôrno de c (V_c) e em tôrno de a (V_a).

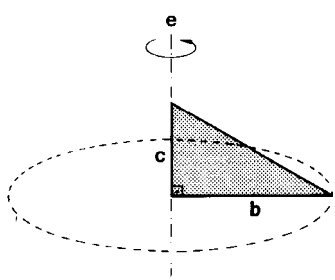
2º) Provar que $\frac{a}{V_a} = \frac{b}{V_b} + \frac{c}{V_c}$

3º) Supondo que $b > c$, comparar V_a, V_b e V_c.

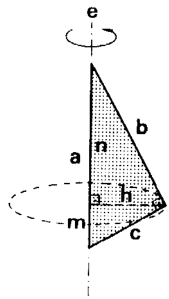
SOLUÇÃO

1º)





$$\boxed{V_b = \frac{1}{3}\pi c^2 b} \qquad \boxed{V_c = \frac{1}{3}\pi b^2 c}$$



$$V_a = \frac{1}{3}\pi h^2 n + \frac{1}{3}\pi h^2 m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_a = \frac{1}{3}\pi h^2 \ (n + m) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_a = \frac{1}{3}\pi h^2 a$$

Sendo $bc = ah \Rightarrow h = \frac{bc}{a}$

Substituindo

$$V_a = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{bc}{a}\right)^2 \cdot a \Rightarrow \boxed{V_a = \frac{1}{3}\pi \frac{b^2c^2}{a}}$$

2º) Tese: $\frac{a}{V_a} = \frac{b}{V_b} + \frac{c}{V_c}$

$$2^\circ \text{ membro} = \frac{b}{V_b} + \frac{c}{V_c} = \frac{b}{\frac{1}{3}\pi c^2 b} + \frac{c}{\frac{1}{3}\pi b^2 c} = \frac{b^2 + c^2}{\frac{1}{3}\pi b^2 c^2} = \frac{a^2}{\frac{1}{3}\pi b^2 c^2} =$$

$$= \frac{a}{\frac{1}{3}\pi \frac{b^2c^2}{a}} = \frac{a}{V_a} = 1^\circ \text{ membro}$$

3º) $b > c \Rightarrow a > b > c$

$$\frac{V_b}{V_c} = \frac{\frac{1}{3}\pi c^2 b}{\frac{1}{3}\pi b^2 c} = \frac{c}{b} < 1 \Rightarrow V_b < V_c$$

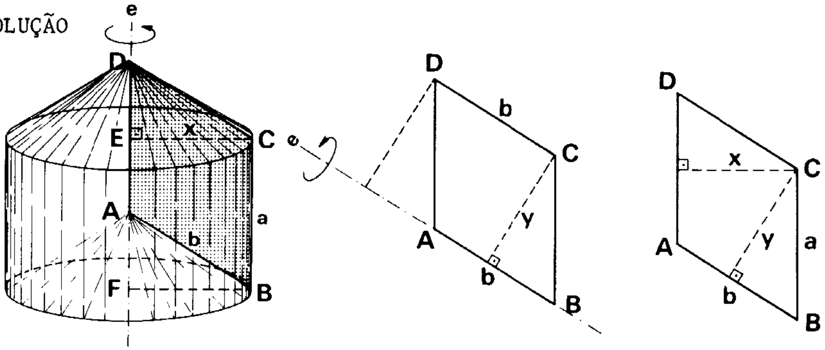
Quando o triângulo gira em tôrno do menor cateto dá volume maior.

$$\frac{V_a}{V_b} = \frac{\frac{1}{3}\pi b^2c^2}{\frac{1}{3}\pi c^2 b} = \frac{b}{a} < 1 \Rightarrow V_a < V_b$$

Quando o triângulo gira em tôrno da hipotenusa dá o volume menor.

R.81 (FAU - 62) Seja dado um paralelogramo ABCD de lado $\overline{AD} = a$ e $\overline{AB} = b$. Mostrar que, se girarmos sucessivamente de 360º o paralelogramo em tôrno de AD e de AB obteremos os volumes V_a e V_b que estão na razão $\frac{b}{a}$.

SOLUÇÃO



O sólido gerado por ABCD é equivalente ao gerado por FBCE (girando em tôrno de AD).

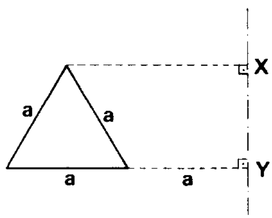
$$V_a = \pi x^2 a \qquad\qquad V_b = \pi y^2 b$$

Área de ABCD = ax = by $\Rightarrow \dfrac{x}{y} = \dfrac{b}{a}$

Estabelecendo a razão vem:

$$\frac{V_a}{V_b} = \frac{\pi x^2 a}{\pi y^2 b} = \left(\frac{x}{y}\right)^2 \cdot \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{V_a}{V_b} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{V_a}{V_b} = \frac{b}{a}$$

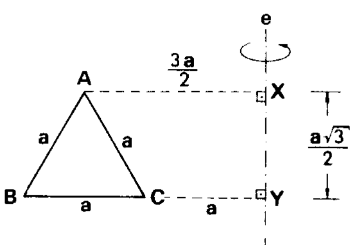
R.82 (EEUM - 68 - 2ª ep) Calcular a área e o volume gerados pela rotação da figura dada em tôrno do eixo indicado XY.



SOLUÇÃO

1º) modo: calculando diretamente

a) Área



$$\underset{\text{gerada por ABC}}{S_{ABC}} = \underset{\text{lateral tronco}}{S_{AB}} + \underset{\text{lateral tronco}}{S_{AC}} + \underset{\text{(coroa)}}{S_{BC}}$$

Fórmulas $\begin{cases} \text{tronco de cone:} & A_L = \pi(R + r)g \\ \text{coroa circular:} & A = \pi(R^2 - r^2) \end{cases}$

$$S_{ABC} = \pi\ (2a + \frac{3a}{2})\ a + \pi\ (\frac{3a}{2} + a)\ a + \pi \left[(2a)^2 - a^2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{7}{2}\pi a^2 + \frac{5}{2}\pi a^2 + 3\pi a^2 \Rightarrow S_{ABC} = 9\pi a^2$$

b) Volume

$$\underbrace{V_{ABC}}_{\left(\substack{\text{gerado}\\ \text{por ABC}}\right)} = \underbrace{V_{XABY}}_{\left(\substack{\text{tronco}\\ \text{de cone}}\right)} - \underbrace{V_{XACY}}_{\left(\substack{\text{tronco}\\ \text{de cone}}\right)}$$

Fórmula: $V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$

$$V_{ABC} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\left[(2a)^2 + (2a)\cdot(\frac{3a}{2}) + (\frac{3a}{2})^2\right] -$$

$$- \frac{\pi}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\left[(\frac{3a}{2})^2 + (\frac{3a}{2})\cdot a + a^2\right]$$

$$V_{ABC} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\left[4a^2 + 3a^2 + \frac{9a^2}{4} - \frac{9a^2}{4} - \frac{3a^2}{2} - a^2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{ABC} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{9a^2}{2} \Rightarrow V_{ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{4}\pi a^3$$

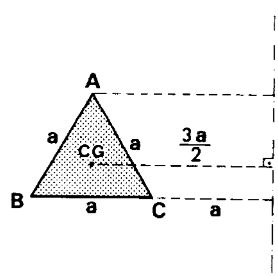
2º modo: usando as fórmulas de Pappus-Guldin

a) Área

$A = 2\ \pi\ \ell\ d$

com $\ell = 3a$ e $d = \frac{3a}{2}$, vem

$A = 2\pi \cdot 3a \cdot \frac{3a}{2} \Rightarrow A = 9\pi a^2$



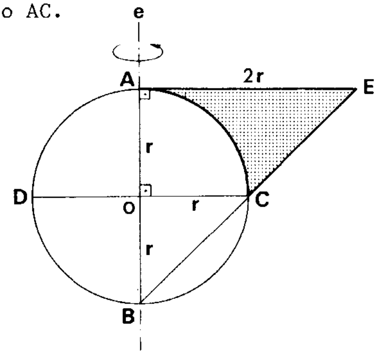
b) Volume

$V = 2\ \pi\ S\ d$

com $S = \frac{1}{2}\,a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

e $d = \frac{3a}{2}$, vem $V = 2\pi \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3a}{2} \Rightarrow V = \frac{3\sqrt{3}}{4}\pi a^3$

R.83 Num círculo de centro O e raio r, traçam-se dois diâmetros perpendiculares AB e CD; traça-se BC e prolonga-se até interceptar em E a tangente ao círculo por A. Gira-se o triângulo ABE em tôrno de AB. Calcular o volume e a área gerada pela superfície CEA compreendida entre as retas AE, EC e o arco AC.



SOLUÇÃO

a) Volume

$$V_{CEA} = \underbrace{V_{OCEA}}_{\left(\begin{smallmatrix}\text{tronco}\\ \text{de cone}\end{smallmatrix}\right)} - \underbrace{V_{OCA}}_{\left(\frac{1}{2}\ \text{esfera}\right)}$$

$$V_{CEA} = \frac{\pi r}{3}\left[(2r)^2 + (2r)\cdot(r) + r^2\right] - \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{CEA} = \frac{7}{3}\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 \Rightarrow V_{CEA} = \frac{5}{3}\pi r^3$$

b) Área

$$S_{CEA} = \underbrace{S_{CE}}_{\left(\begin{smallmatrix}\text{lateral}\\ \text{de tronco}\end{smallmatrix}\right)} + \underbrace{S_{EA}}_{(\text{círculo})} + \underbrace{S_{AC}}_{\left(\frac{1}{2}\ \text{superfície esférica}\right)}$$

$$S_{CEA} = \pi(2r + r)\cdot r\sqrt{2} + \pi(2r)^2 + \frac{1}{2}4\pi r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{CEA} = 3\sqrt{2}\,\pi r^2 + 4\pi r^2 + 2\pi r^2 \Rightarrow S_{CEA} = 3(2+\sqrt{2})\pi r^2$$

IV. PROBLEMAS PROPOSTOS.

P.234 O volume de um cilindro circular reto é igual ao produto da área do retângulo gerador pelo comprimento da circunferência que descreve o ponto de concurso das diagonais do retângulo.

P.235 As áreas laterais dos cilindros gerados por um mesmo retângulo que gira ao redor de cada lado, são iguais.

P.236 (EPUSP - 61) Dos cones gerados pelas rotações de um triângulo retângulo em tôrno de seus catetos, tem maior volume aquêle que resulta da rotação em tôrno do maior cateto?

P.237 As áreas laterais dos cones gerados por um mesmo triângulo retângulo que gira em tôrno de cada cateto são inversamente proporcionais aos catetos fixos.

P.238 Os volumes dos cones gerados por um triângulo retângulo que gira em tôrno de cada cateto são inversamente proporcionais aos catetos fixos.

P.239 (FEIUC - 50) Representando-se por V_a, V_b e V_c os volumes dos sólidos gerados por um triângulo retângulo a, b, c, quando gira respectivamente em tôrno de hipotenusa a, dos catetos b e c, verificar a identidade:

$$\frac{1}{V_a^2} = \frac{1}{V_b^2} + \frac{1}{V_c^2}$$

P.240 (FFCLUSP - 54) Calcular o volume do sólido gerado pela rotação de um triângulo retângulo em tôrno da hipotenusa sabendo-se que um dos ângulos do triângulo é de 60° e que a hipotenusa tem medida 2a.

P.241 Calcular o volume e a área do sólido gerado por um triângulo equilátero de lado a que gira ao redor de um de seus lados.

P.242 (FAMACK - 67) Calcular o volume do sólido gerado por um triângulo equilátero de lado a que gira em tôrno de um eixo que passa por um de seus vértices e é paralelo ao lado oposto.

P.243 (FFCLUSP - 52) Calcular o volume do sólido gerado por um triângulo equilátero de lado a que gira em tôrno de um eixo que contém um vértice e é paralelo à altura relativa a outro vértice.

P.244 Calcular o volume e a área do sólido gerado pela rotação de um quadrado de lado a, em tôrno de um eixo que passa por um de seus vértices e é paralelo a uma de suas diagonais.

P.245 (ITA - 53) Calcular o volume do sólido gerado por um triângulo retângulo isósceles, cujos catetos medem 3 m, ao girar em tôrno da paralela à hipotenusa traçada pelo vértice do ângulo reto.

P.246 Quando um triângulo retângulo isósceles gira ao redor de uma reta conduzida pelo vértice do ângulo reto, paralelamente à hipotenusa êle gera um volume equivalente à esfera que teria a hipotenusa por diâmetro.

P.247 (EPUSP - 64) Sendo a o lado de um losango e θ um de seus ângulos, exprima em função de a e θ o volume do sólido que se obtém girando o losango em tôrno de um de seus lados.

P.248 (FEIUC - 58) As diagonais de um losango de 5 cm de lado estão na razão 1:2. Achar o volume do sólido que se obtém, quando o losango dá um giro de 360° em tôrno de um de seus lados.

P.249 Um retângulo de 4 cm de comprimento e 3 cm de largura gira ao redor de um eixo, situado no seu plano, paralelo ao maior lado e à distância de 1 cm dêsse lado. Calcular o volume do sólido gerado pela revolução dêsse retângulo.

P.250 (EEMACK - 63) Um retângulo de dimensões a e b gira em tôrno de uma reta de seu plano, paralela aos lados de medida b e cuja distância ao centro do retângulo é $d > \frac{a}{2}$. Determinar a superfície total e o volume do sólido anular gerado pelo retângulo.

P.251 O volume do sólido gerado por um retângulo girando em tôrno de um eixo de seu plano, paralelo a um de seus lados, e externo ao retângulo, é igual ao produto da área do retângulo pelo comprimento da circunferência descrita pelo centro do retângulo.

P.252 O volume de um cilindro circular gerado por um retângulo, de área A cm^2, é de B cm^3. Calcular o raio.

P.253 Calcular as dimensões de um retângulo sabendo-se que se o fizermos girar sucessivamente em tôrno de dois lados adjacentes, os volumes dos cilindros gerados são, respectivamente, V e V'.

P.254 Conhecendo-se a área A do triângulo gerador de um cone e a área total B do cone, calcular o apótema e o raio da base.

P.255 Sabendo-se que OABCD é um semi-hexágono regular de $\frac{10}{\sqrt{\pi}}$ m de lado, calcular a área da superfície gerada pela poligonal ABCD em rotação completa em tôrno do diâmetro AOB.

P.256 Um triângulo equilátero ABC tem lado a; por um ponto P da base BC traçam-se as paralelas PR e PS aos lados AB e AC, respectivamente que concorrem com AC e AB, respectivamente em R e S. Determinar a distância x = PB, de modo que o volume do sólido gerado pelo paralelogramo PRAS seja $\frac{2}{3}$ do volume do sólido gerado pelo triângulo ABC, quando a figura girar ao redor de BC.

V. TESTES.

T.139 (PUC - 71) O diâmetro de uma esfera mede 4 m; uma corda paralela a êsse diâmetro mede 2 m. A área da superfície que se obtém girando a corda ao redor do diâmetro vale:

a) $\frac{\pi}{2}\sqrt{3}$
b) $\pi\sqrt{3}$
c) $2\pi\sqrt{3}$
d) $4\pi\sqrt{3}$
e) $5\pi\sqrt{3}$

T.140 (EESCUSP - 69) As áreas totais S_a e S_b dos cilindros gerados pela rotação de um retângulo de lados a e b, em tôrno de cada um dos seus lados a e b respectivamente são:

a) Proporcionais aos lados a e b.
b) Iguais.
c) Proporcionais aos quadrados dos lados a e b.
d) Inversamente proporcionais aos lados a e b.
e) Nenhuma das afirmações acima é verdadeira.

T.141 (CICE - 68) Um triângulo retângulo possui catetos de comprimentos a e b. Seja V_a o volume do cone obtido pela rotação do triângulo em tôrno do cateto de comprimento a; analogamente, seja V_b o volume do cone gerado pela rotação do triângulo em tôrno do outro cateto. O quociente $\frac{V_a}{V_b}$ vale:

a) $\dfrac{ab}{a^2 + b^2}$ d) $\dfrac{a + 1}{b + 1}$

b) $\dfrac{a}{a + b}$ e) $\dfrac{a^2 + b^2}{\pi\ a.b}$

c) $\dfrac{b}{a}$

T.142 (EELINS - 67) Um triângulo retângulo de catetos a e b tem 1cm^2 de área. Pela rotação do triângulo em tôrno do cateto b obtém-se um cone de volume $1\ \text{cm}^3$. O cateto b mede:

a) $\dfrac{4}{3}\pi$ cm d) $(\pi - 1)$ cm

b) 4 cm e) nenhuma das respostas

c) $\dfrac{2}{3}\pi$ cm

T.143 (EELINS - 67) Sendo V_a, V_b e V_c os volumes dos cones gerados por um triângulo ABC, retângulo em A, girando sucessivamente, em tôrno de seus lados BC, CA, AB, obedecem à relação:

a) $V_a = V_b + V_c$ d) $V_a^2 = V_b \cdot V_c$

b) $V_a^2 = V_b^2 + V_c^2$ e) nenhuma das anteriores

c) $\dfrac{1}{V_a^2} = \dfrac{1}{V_b^2} + \dfrac{1}{V_c^2}$

T.144 (CICE - 70) V_a, V_b e V_c sejam os volumes gerados por um triângulo retângulo em tôrno, respectivamente, da hipotenusa e dos catetos. Então

$$\frac{1}{V_a} = \frac{1}{V_b} + \frac{1}{V_c}$$

a) sempre
b) se e só se o triângulo é isósceles
c) se e só se $B = \dfrac{\pi}{3}$
d) nunca
e) nenhuma destas respostas

T.145 (CICE - 70) Sejam V_a, V_b e V_c os volumes gerados por um triângulo retângulo em tôrno, respectivamente, da hipotenusa e dos catetos. Então:

a) $\frac{2}{V_a} = \frac{1}{V_b} + \frac{1}{V_c}$

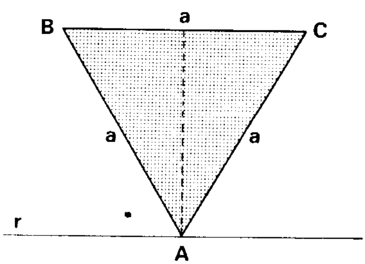
b) $V_a = V_b + V_c$

c) $\frac{V_b}{c} + \frac{V_c}{b} = \frac{2a}{bc}$

d) $\frac{V_b}{c} + \frac{V_c}{b} = \frac{V_a}{h}$ em que h é a altura relativa à hipotenusa

e) nenhuma das anteriores

T.146 (PUC - 71) A medida dos lados de um triângulo equilátero ABC é $\underline{a}$. O triângulo ABC gira em tôrno de uma reta $\underline{r}$ do plano do triângulo, paralela ao lado BC e passando pelo vértice $\underline{A}$. O volume gerado por êsse triângulo mede:



a) $\frac{\pi a^3}{3}$

b) $\frac{\pi a^3}{2}$

c) πa^3

d) $\frac{3\pi a^3}{2}$

e) $\frac{\pi a^3}{5}$

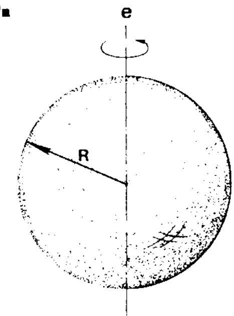
CAPÍTULO X

SÓLIDOS ESFÉRICOS

I. SUPERFÍCIE ESFÉRICA E SUAS PARTES.

175• SUPERFÍCIE ESFÉRICA

É a superfície de revolução cuja geratriz é uma semi-circunferência com extremidades no eixo.



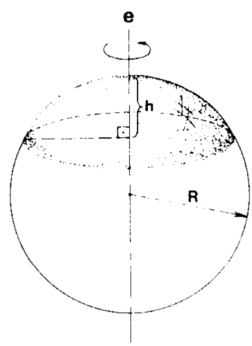
176• CALOTA ESFÉRICA

É a superfície de revolução cuja geratriz é um arco de circunferência e cujo eixo é uma reta tal que:

a) passa pelo centro da circunferência que contém o arco;

b) passa por um extremo do arco e não o intercepta em outro ponto;

c) é coplanar com o arco.



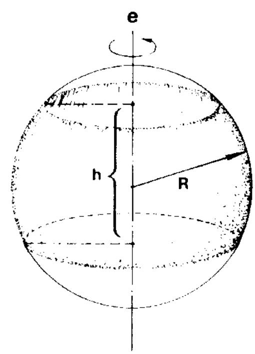
177• ZONA ESFÉRICA

É a superfície de revolução cuja geratriz é um arco de circunferência e cujo eixo é uma reta tal que:

a) passa pelo centro da circunferência que contém o arco;

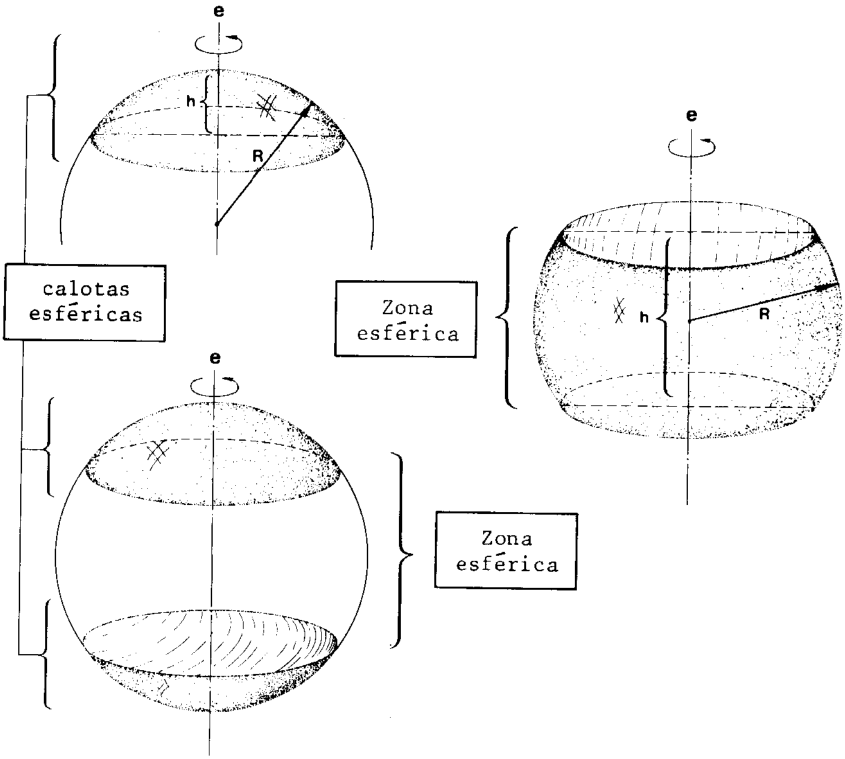
b) não passa por nenhum extremo do arco, nem intercepta o arco em outro ponto;

c) é coplanar com o arco.



178• Outra definição para calota e zona esférica.

Seccionando-se uma superfície esférica por dois planos paralelos entre si, dividimos esta superfície em três partes; a que está entre os dois planos reunida às duas circunferências-secção, é chamada *zona esférica*, e cada uma das outras duas reunidas à respectiva circunferência-secção, é chamada *calota esférica*.



179• ÁREA DA CALOTA e ÁREA DA ZONA ESFÉRICA

$$\boxed{A = 2\ \pi Rh}$$

Veja a dedução no item 204

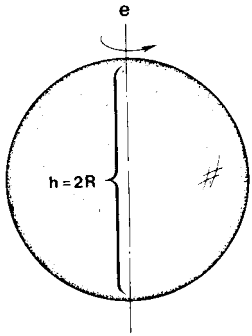
onde: R é o raio da circunferência que contém o arco (é o raio da *superfície esférica*).

h é a projeção do arco sôbre o eixo.

$A_{calota} = 2\ \pi Rh_{calota}$ $\qquad$ $A_{zona} = 2\ \pi Rh_{zona}$

180• ÁREA DA SUPERFÍCIE ESFÉRICA

A superfície esférica pode ser entendida, por extensão, como uma calota (ou zona) esférica de altura igual ao diâmetro (h = 2R). Daí, a área da superfície esférica é:

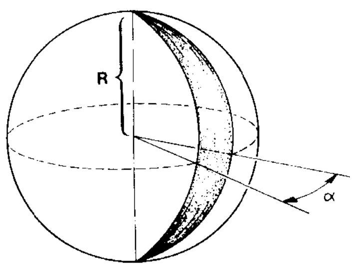


$$A = 2\ \pi R \cdot \underbrace{2R}_{h} \implies \boxed{A = 4\pi R^2}$$

181• FUSO ESFÉRICO

É a intersecção de uma *superfície esférica* com um diedro (ou setor diedral) cuja aresta contém um diâmetro dessa superfície esférica.

O fuso esférico não é considerado superfície de revolução pois é gerado pela rotação *incompleta* de uma semi - circunferência.



O ângulo α, medida do diedro, medido na secção equatorial, é quem caracteriza o fuso.

182• ÁREA DO FUSO

Sendo α (em graus) a medida do diedro

$$\left.\begin{array}{l} 360^{\circ} — 4\ \pi R^2 \\ \alpha^{0} — A_{fuso} \end{array}\right\} \implies \boxed{A_{fuso} = \frac{\pi\ R^2\ \alpha}{90}}$$

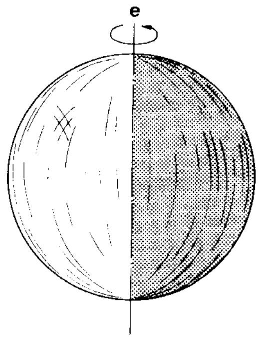
com α em radianos

$$\left.\begin{array}{l} 2\pi — 4\ \pi R^2 \\ \alpha — A_{fuso} \end{array}\right\} \implies A_{fuso} = 2R^2\alpha$$

II. ESFERA E SUAS PARTES.

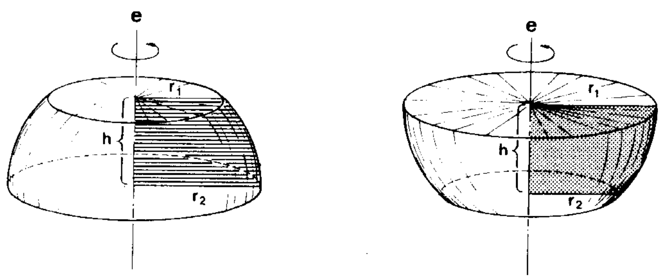
183• ESFERA

É o sólido gerado pela rotação de um semi-círculo em tôrno do eixo que contém o diâmetro.



184• SEGMENTO ESFÉRICO DE DUAS BASES

Consideremos um segmento circular de duas bases e um eixo (reta) perpendicular a essas bases pelo centro e que divide o segmento em duas partes congruentes. Girando uma dessas partes em tôrno do eixo obtém-se um sólido que é chamado *segmento esférico de duas bases*.



185• VOLUME

$$\boxed{V = \frac{\pi h}{6}\left[3(r_1^2 + r_2^2) + h^2\right]}$$

onde

r_1 é a medida do raio de uma base

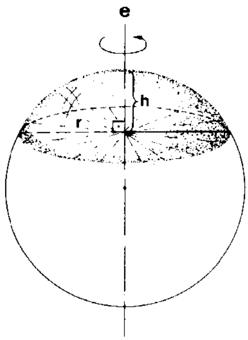
r_2 é a medida do raio da outra base e

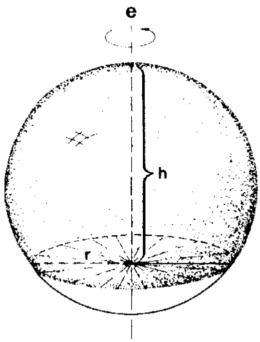
h é a medida da altura (projeção do arco sôbre o eixo).

Veja a dedução no item 196

186• SEGMENTO ESFÉRICO DE UMA BASE

Consideremos um segmento circular de uma base e um eixo (reta) perpendicular a ela pelo centro e que divide o segmento em duas partes congruentes. Girando uma dessas partes em tôrno do eixo obtém-se um sólido que é chamado *segmento esférico de uma base*.





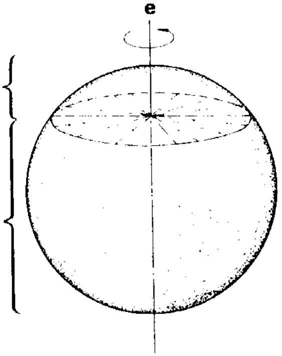
187• VOLUME

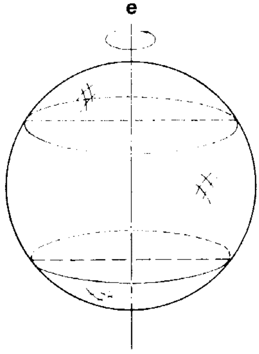
Sai da fórmula do volume do segmento esférico de duas bases fazendo: $r_1 = r$ e $r_2 = 0$

$$V = \frac{\pi h}{6} \left[3(r^2 + 0) + h^2 \right] \Longrightarrow \boxed{V = \frac{\pi h}{6} \left[3r^2 + h^2 \right]}$$

188• Outra definição para os segmentos esféricos

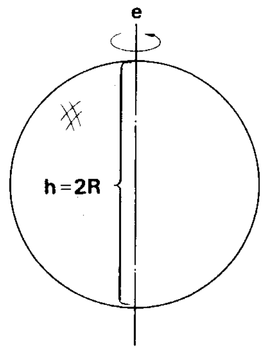
Seccionando-se uma esfera por dois planos paralelos entre si, dividimos a esfera em três partes; a que está compreendida entre os dois planos reunida aos dois círculos-secção, é chamada *segmento esférico de duas bases*, e, cada uma das outras duas reunidas ao respectivo círculo-secção, é chamada *segmento esférico de uma base*.





189• VOLUME DA ESFERA

A esfera pode ser considerada, por extensão, um segmento esférico onde $r_1 = 0$, $r_2 = 0$ e $h = 2R$. Daí o volume da esfera é:



$$V = \frac{\pi\overbrace{(2R)}^{h}}{6}\left[\,3(\overset{r_1^2}{\downarrow \atop 0} + \overset{r_2^2}{\downarrow \atop 0}) + \underbrace{(2R)}_{h}{}^2\,\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

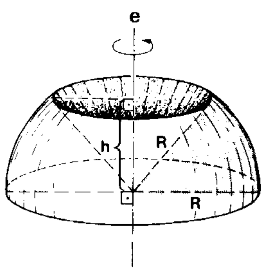
190• SETOR ESFÉRICO

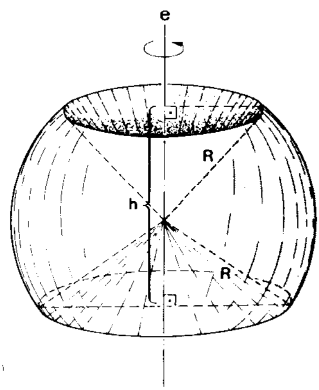
É o sólido de revolução obtido pela rotação de um setor circular em tôrno de um eixo tal que:

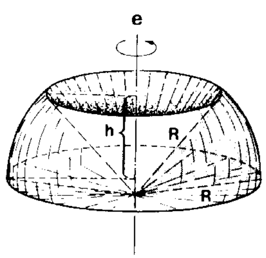
a) passa pelo vértice do setor circular;

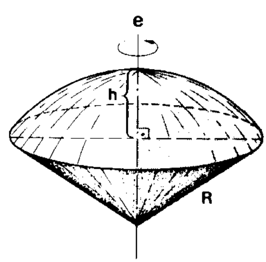
b) não intercepta o arco do setor circular ou o intercepta num extremo;

c) é coplanar com o setor circular.









191• VOLUME DO SETOR

$$\boxed{V = \frac{2}{3}\pi R^2 h}$$

onde

R é a medida do raio do setor (note que é o raio da esfera) e

h é a medida da altura do setor (projeção do arco sôbre o eixo).

NOTA: A esfera pode ser considerada, por extensão, um setor esférico de altura $h = 2R$

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 \cdot \underbrace{2R}_{h} \Longrightarrow \boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

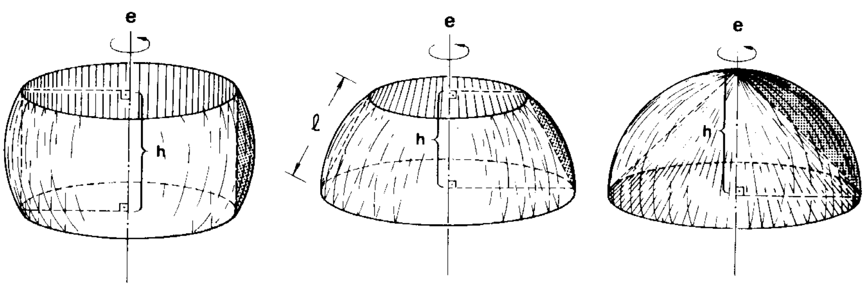
192• ANEL ESFÉRICO

É um sólido de revolução que se obtém pela rotação de um segmento circular (de uma base) em tôrno de um eixo tal que:

a) passa pelo centro do círculo que define o segmento circular;

b) não intercepta o arco do segmento circular ou intercepta-o num dos extremos;

c) é coplanar com o segmento circular.



193• VOLUME DO ANEL

$$\boxed{V = \frac{\pi h}{6}\ell^2}$$

onde

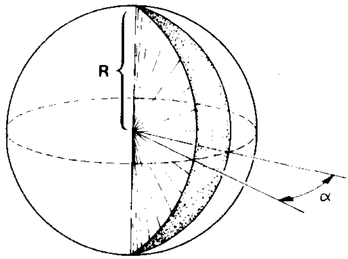
h é a medida da altura (projeção do arco sôbre o eixo) e

ℓ é a medida da corda (base do segmento circular).

194• CUNHA ESFÉRICA

É a intersecção de uma esfera com um *diedro* (ou setor diedral) cuja aresta contém o diâmetro da esfera.

A cunha é caracterizada pelo raio da esfera e pela medida do diedro.



195• VOLUME DA CUNHA

Sendo α (em graus) a medida do diedro

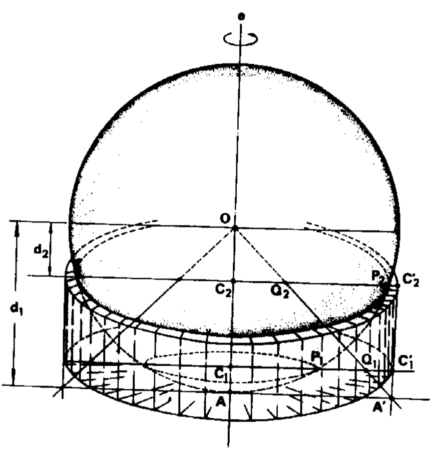
$$\left.\begin{array}{l} 360^{\circ} \text{ ———— } \frac{4}{3}\pi R^3 \\ \alpha^{\circ} \text{ ———— } V_{cunha} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{V_{cunha} = \frac{\pi R^3 \alpha}{270}}$$

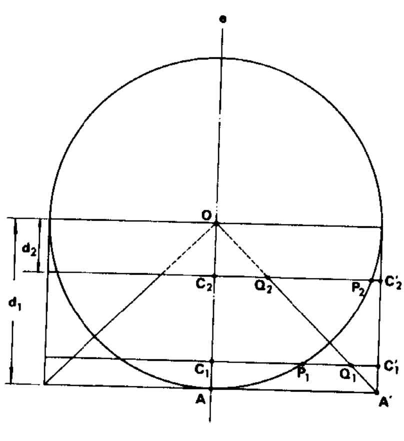
III. DEDUÇÕES DAS FÓRMULAS DE VOLUMES DOS SÓLIDOS ESFÉRICOS.

A dedução das fórmulas de volumes dos sólidos esféricos (segmento esférico, setor esférico, anel esférico, cunha esférica) pode ser feita a partir do segmento esférico de raios r_1 e r_2 e altura h.

196• VOLUME DO SEGMENTO ESFÉRICO

Consideremos a figura abaixo.





onde

$OA = AA' = OP_1 = OP_2 = R$ ("raio da esfera")

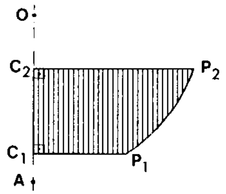
$C_1P_1 = r_1$ e $C_2P_2 = r_2$ (raios das bases do segmento esférico)

$OC_1 = C_1Q_1 = d_1$ e $OC_2 = C_2Q_2 = d_2$

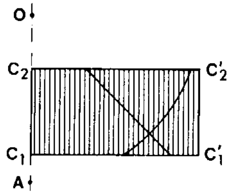
$C_1C_2 = h = d_1 - d_2$

Nesta figura devemos reconhecer:

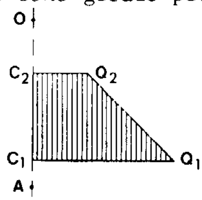
(I) O *segmento esférico* gerado pela rotação

de  ao redor do eixo OA.

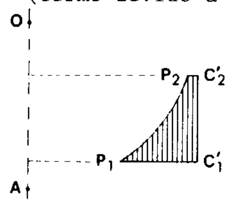
(II) O *cilindro* gerado pela rotação

de  ao redor do eixo OA.

(III) O *tronco de cone* gerado pela rotação

de  ao redor de OA.

(IV) A "escudela" (têrmo devido a Gelileu) gerado pela rotação

de  ao redor de OA.

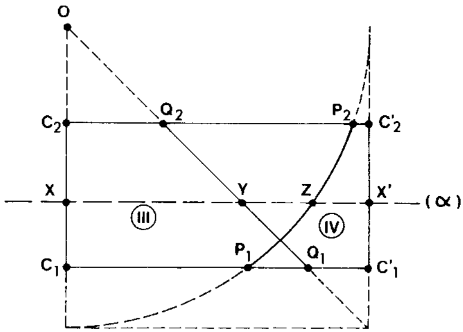
Reconhecidos êstes quatro sólidos, provaremos que a "escudela" (IV) é *equivalente* ao tronco de cone (III) usando o princípio de Cavalieri. Para isso, demonstraremos que as secções de (III) e (IV) com qualquer plano secante α paralelo ao das bases são superfícies equivalentes:

Notemos que:

$$(XY) = (OX)$$

$$(OZ)^2 - (XZ)^2 = (OX)^2$$

$$XX' = OZ$$



Secção do tronco $= \pi(XY)^2 = \pi(OX)^2$

Secção da "escudela" $= \pi\left[(XX')^2 - (XZ)^2\right] = \pi\left[(OZ)^2 - (XZ)^2\right] =$
$= \pi(OX)^2$

Logo, pelo princípio de Cavalieri:

$$\boxed{\text{tronco (III)} \approx \text{"escudela" (IV)}}$$

Seguindo, indicando por V o volume do segmento esférico (I) , V_{II} o do cilindro, V_{III} o do tronco de cone e V_{IV} o da "escudela":

$$V = V_{II} - V_{IV} \quad \text{e como} \quad V_{IV} = V_{III},$$

$$V = V_{II} - V_{III}$$

Então:

$$V = \pi R^2 h - \frac{\pi h}{3}\left[(C_1Q_1)^2 + (C_1Q_1)(C_2Q_2) + (C_2Q_2)^2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \pi R^2 h - \frac{\pi h}{3}\left[d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi h}{6}\left[6R^2 - 2d_1^2 - 2d_1 d_2 - 2d_2^2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi h}{6}\left[3R^2 + 3R^2 - 3d_1^2 - 3d_2^2 + d_1 + d_2 - 2d_1 d_2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi h}{6}\left[3\underbrace{(R^2 - d_1^2)} + 3\underbrace{(R^2 - d_2^2)} + \underbrace{(d_1 - d_2)^2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi h}{6}\left[3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2\right] \Rightarrow$$

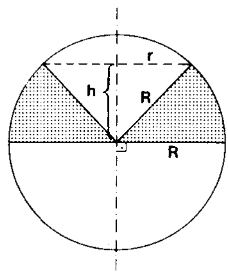
$$\Rightarrow \quad \boxed{V = \frac{\pi h}{6}\left[3(r_1^2 + r_2^2) + h^2\right]}$$

NOTA: Da fórmula do volume do segmento esférico de duas bases sai a do volume do segmento esférico de uma base, a do volume da esfera e desta a do volume da cunha, como já vimos nos itens 187, 189 e 195 .

197• VOLUME DO SETOR ESFÉRICO

Sendo conhecida a fórmula do volume do segmento esférico, deduzimos a fórmula do volume do setor esférico, dividindo em três casos:

1º CASO: Um dos raios do contôrno do setor circular (que gera o setor esférico) é perpendicular ao eixo.



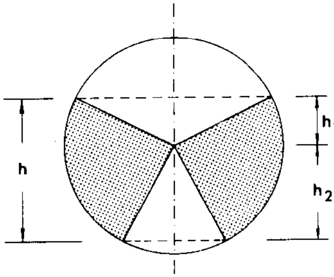
$$\left.\begin{array}{l} V_{setor} = V_{segm.\ esf.} - V_{cone} \\ V_{segm.\ esf.} = \frac{\pi h}{6}\left[3(R^2+r^2)+h^2\right] \\ V_{cone} = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{2\pi r^2 h}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow V_{setor} = \frac{\pi h}{6}\left[3R^2 + 3r^2 + h^2 - 2r^2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{setor} = \frac{\pi h}{6}\left[3R^2 + \underbrace{r^2 + h^2}_{R^2}\right] \Rightarrow V_{setor} = \frac{\pi h}{6} \cdot 4\ R^2 \Rightarrow$$

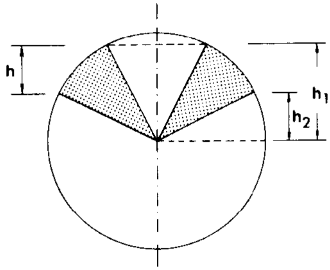
$$\Rightarrow \boxed{V_{setor} = \frac{2}{3}\ \pi R^2 h}$$

2º CASO: Nenhum dos raios do contôrno do setor circular é perpendicular ao eixo.

Recaímos em soma ou diferença de dois setores do 1º caso.



$h = h_1 + h_2$



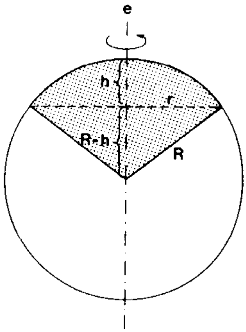
$h = h_1 - h_2$

$$V_{setor} = V_{setor\ 1} \pm V_{setor\ 2} = \frac{2}{3}\pi R^2 \underbrace{(h_1 \pm h_2)}_{h} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{V_{setor} = \frac{2}{3}\pi R^2 h}$$

3º CASO: Um dos raios do contôrno do setor circular (que gera o setor esférico) está contido no eixo.

$$\left.\begin{aligned} V_{setor} &= V_{segm.} + V_{cone} \\ V_{segm.} &= \frac{\pi h}{6}\left[3r^2 + h^2\right] \\ V_{cone} &= \frac{\pi}{3} r^2 (R - h) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow V_{setor} = \frac{\pi h}{6}\left[3r^2 + h^2\right] + \frac{\pi r^2}{3}(R - h) =$$

$$= \frac{\pi}{6}\left[3r^2h + h^3 + 2Rr^2 - 2r^2h\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V_{setor} = \frac{\pi}{6}\cdot\left[r^2h + h^3 + 2Rr^2\right]$$

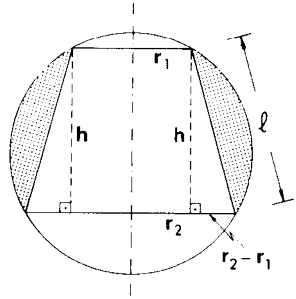
Do triângulo retângulo: $r^2 = R^2 - (R - h)^2 = 2Rh - h^2$

$$V_{setor} = \frac{\pi}{6}\left[(2Rh - h^2)h + h^3 + 2R(2Rh - h^2)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{setor} = \frac{\pi}{6}\left[2Rh^2 - h^3 + h^3 + 4R^2h - 2Rh^2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{setor} = \frac{\pi}{6}\cdot 4R^2h \Rightarrow \boxed{V_{setor} = \frac{2}{3}\pi R^2 h}$$

198• VOLUME DO ANEL ESFÉRICO



$$\left.\begin{array}{l} V_{anel} = V_{seg.\ esf.} - V_{tronco\ de\ cone} \\ V_{segm.} = \dfrac{\pi h}{6}\left[3(r_1^2 + r_2^2) + h^2\right] \\ V_{tronco} = \dfrac{\pi h}{3}\left[r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right] \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{anel} = \frac{\pi h}{6}\left[3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2 - 2r_1^2 - 2r_1 r_2 - 2r_2^2\right] =$$

$$= \frac{\pi h}{6}\left[\underbrace{r_1^2 - 2r_1 r_2 + r_2^2}\, + h^2\right] = \frac{\pi h}{6}\left[\underbrace{(r_2 - r_1)^2 + h^2}_{\ell^2}\right] \Rightarrow$$

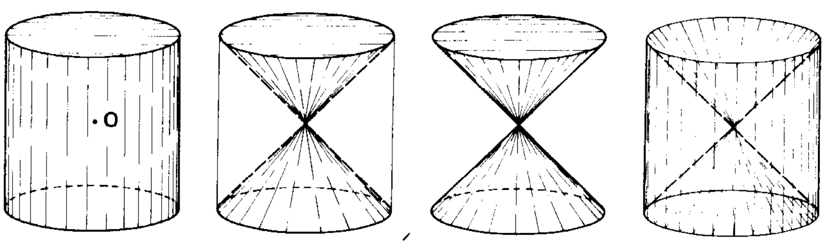
$$\Rightarrow \quad \boxed{V_{anel} = \frac{\pi h}{6}\ell^2}$$

199• VOLUME DA ESFERA

Vamos deduzir a fórmula do volume da esfera sem utilizar o segmento esférico ou o setor esférico.

Para isso precisamos conhecer um sólido nôvo.

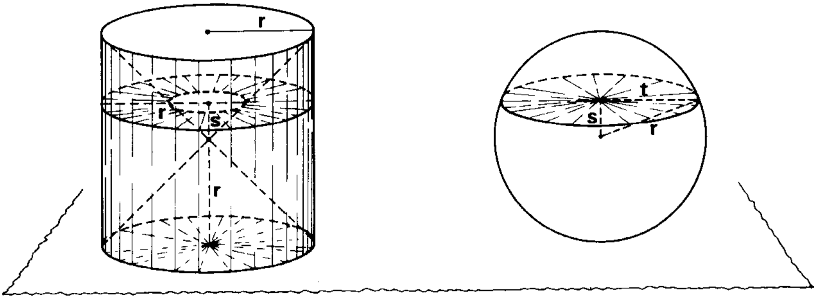
Consideremos um cilindro equilátero (raio da base r e altura 2r) de centro O. Notemos a existência de dois cones cada um com base numa



cilindro equilátero — Clépsidra — Anticlépsidra

base do cilindro e vértice em O. A reunião dêsses dois cones é um sólido chamado *clépsidra*. O sólido que se obtém tirando a clépsidra do cilindro é chamado *anticlépsidra* (dentro do cilindro e fora da clépsidra).

Vamos provar, pelo Princípio de Cavalieri (ver item 117) que o volume da esfera é igual ao da anticlépsidra.



Tomamos um plano paralelo ao da base e secante aos dois sólidos.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Área da secção na esfera} = \pi t^2 = \pi(r^2 - s^2) \\ \text{Área da secção na anticlépsidra} = \underbrace{\pi r^2 - \pi s^2}_{\text{(coroa circular)}} = \pi(r^2 - s^2) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Volume da esfera = Volume da anticlépsidra = V

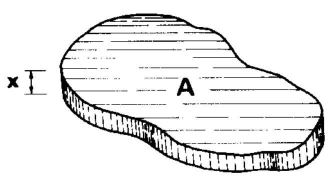
Então: $V = V_{\text{cilindro}} - V_{\text{clépsidra}}$

$$V = \pi r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \frac{1}{3} \pi r^2 r \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = \frac{4}{3} \pi r^3}$$

IV. ÁREA DAS SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO.

200• NOÇÃO INTUITIVA

Se considerarmos uma superfície limitada de área A e sôbre ela formarmos um sólido de altura x de bases "paralelas", teremos indicando com V o volume do sólido ("prismas" reunidos com "cilindros") de base A e altura x.



$$V = Ax \quad \Rightarrow \quad A = \frac{V}{x}$$

Esta última igualdade é verificada para qualquer x.

Intuitivamente, uma superfície é imaginada como uma "placa sólida" de "espessura infinitamente pequena".

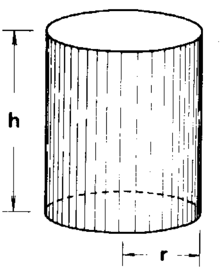
Por isso, se uma "placa sólida" de volume V_p e espessura x fôr tal que a expressão (função)

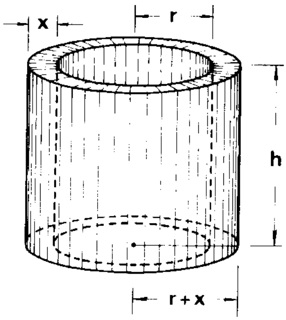
$\frac{V_p}{x}$ tem sentido (é definida) para x = 0, então

$\frac{V_p}{x}$ (para x = 0) será *definida como a área da placa.*

Assim agindo poderemos deduzir as expressões das áreas: lateral do cilindro, superfície esférica, lateral do cone, calota ou zona esférica. Nestes casos, o artifício que acima procuramos generalizar são mais reais e simples como veremos a seguir.

201• ÁREA LATERAL DO CILINDRO DE REVOLUÇÃO





$$V_p = \pi(r + x)^2h - \pi r^2h \quad \Rightarrow \quad \frac{V_p}{x} = \pi h(2r + x)$$

Então, para x = 0, vem:

$$A_L = \pi h(2r + 0) \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_L = 2\pi rh}$$

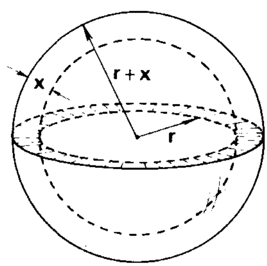
202• ÁREA DA SUPERFÍCIE ESFÉRICA

$$V_p = \frac{4}{3}\pi(r + x)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_p = \frac{4}{3}\pi\left[(r + x)^3 - r^3\right] \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_p = \frac{4}{3}\pi\left[3r^2x + 3rx^2 + x^3\right] \quad \Rightarrow$$

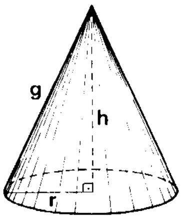
$$\Rightarrow \frac{V_p}{x} = \frac{4}{3}\pi\left[3r^2 + 3rx + x^2\right]$$

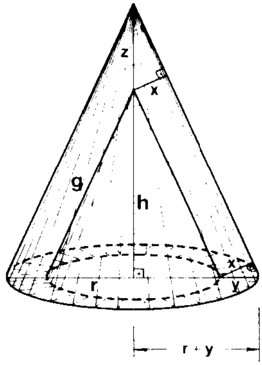


Então, para x = 0, vem

$$A = \frac{4}{3}\pi\left[3r^2 + 3r\cdot 0 + 0^2\right] \Rightarrow \boxed{A = 4\pi r^2}$$

203• ÁREA LATERAL DO CONE DE REVOLUÇÃO





Por semelhança entre triângulos calculamos y e z em função de x.

$$\frac{z}{x} = \frac{g}{r} \Longrightarrow z = \frac{g}{r}x \qquad \frac{y}{x} = \frac{g}{h} \Longrightarrow y = \frac{g}{h}x$$

Segue-se

$$V_p = \frac{1}{3}\pi\ (r + y)^2\cdot(h + z) - \frac{1}{3}\pi\ r^2h$$

Substituindo y e z temos:

$$V_p = \frac{1}{3}\pi\left[(r + \frac{g}{h}x)^2\cdot(h + \frac{g}{r}x) - r^2 h\right] \Longrightarrow$$

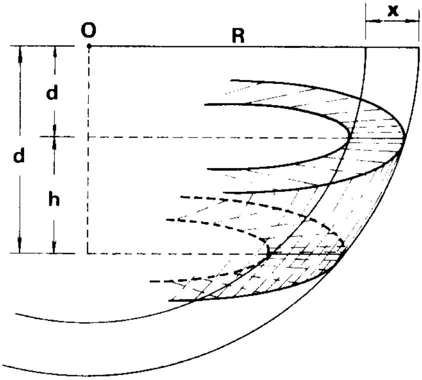
$$\Longrightarrow V_p = \frac{1}{3}\pi\left[rgx + 2\ rgx + \frac{2g^2}{h}x^2 + \frac{g^2}{h}x^2 + \frac{g^3}{h^2\ r}x^3\right] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{V_p}{x} = \frac{1}{3}\pi\left[3\ rg + \frac{3g^2}{h}x + \frac{g^3}{h^2\ r}x^2\right]$$

Então, para x = 0, vem:

$$A_L = \frac{1}{3}\pi\left[3\ rg - \frac{3g^2}{h}\ 0 + \frac{g^3}{h^2r}\ 0^2\right] \Longrightarrow \boxed{A_L = \pi\ rg}$$

204• ÁREA DA CALOTA OU ZONA ESFÉRICA



O volume do segmento esférico correspondente à zona (ou calota) esférica é dada por:

$$V_1 = \pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi h(d_1^2 + d_1 \cdot d_2 + d_2^2)$$

Para a esfera concêntrica de raio r + x, o volume é:

$$V_2 = \pi(R + x)h - \frac{1}{3}\pi h\ (d_1^2 + d_1\ d_2 + d_2^2)$$

Portanto:

$$V_p = V_2 - V_1 \implies V_p = \pi(R + x)^2\ h - \pi R^2 h \implies$$

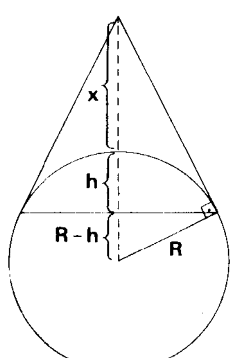
$$\implies V_p = \pi(2R + x)Hx \implies \frac{V_p}{x} = \pi(2R + x)\ h$$

Então para $x = 0$, vem:

$$\boxed{A_{\text{zona (ou calota)}} = \pi(2R + 0)h = 2\ \pi Rh}$$

V. PROBLEMAS RESOLVIDOS.

R.84 (EEUM - 67) Qual é a fração da área da superfície da Terra suposta esférica (raio = 6300 km) observada por um cosmonauta que se acha a altura de 300 km?



SOLUÇÃO

Sendo:

x = 300 a altitude

R = 6300 o raio da terra e

h a altura da calota visível

O problema pede

$$\frac{A_{\text{calota}}}{A_{\text{sup. esf.}}} = \frac{2\pi Rh}{4\pi R^2} = \frac{h}{2R}$$

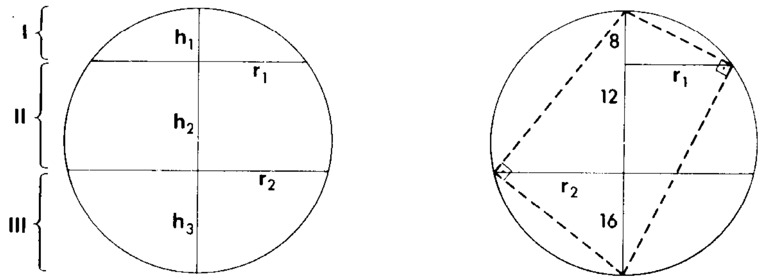
Calculando h, temos, do triângulo retângulo:

$$R^2 = (R - h)(x + R) \Rightarrow h = \frac{Rx}{x + R} \Rightarrow \frac{h}{2R} = \frac{x}{2(x + R)}$$

Substituindo x e R vem: $\frac{h}{2R} = \frac{300}{2(300 + 6300)} \Rightarrow \frac{h}{2R} = \frac{1}{44}$

R.85 Uma esfera de 18 m de raio é seccionada por planos perpendiculares a um diâmetro dividindo-o em partes proporcionais a 2, 3 e 4. Calcular as áreas totais e os volumes dos sólidos determinados.

SOLUÇÃO



Os sólidos determinados são segmentos esféricos.

a) Cálculo dos elementos caracterizados na figura.

$R = 18$ $h_1 = 2k$ $h_2 = 3k$ $h_3 = 4k$

$h_1 + h_2 + h_3 = 36 \Rightarrow 9k = 36 \Rightarrow k = 4$

$h_1 = 8$ $h_2 = 12$ $h_3 = 16$

Dos triângulos retângulos vem:

$r_1^2 = 8 \cdot 28 \Rightarrow r_1^2 = 224$ $r_2^2 = 16 \cdot 20 \Rightarrow r_2^2 = 320$

b) Cálculo das áreas e volumes.

Do segmento esférico I.

$$A_T = A_{calota} + A_{círculo} \Rightarrow A_T = 2\pi R h_1 + \pi r_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_T = 2\pi \cdot 18 \cdot 8 + \pi \cdot 224 \Rightarrow A_T = 512\pi \ (m^2)$$

$$V = \frac{\pi h_1}{6}\left[3r_1^2 + h_1^2\right] \Rightarrow V = \frac{\pi \cdot 8}{6}\left[3 \cdot 224 + 64\right] \Rightarrow V = \frac{2944}{3}\pi \ (m^3)$$

Do segmento esférico II.

$$A_T = A_{zona} + A_{círculo\ I} + A_{círculo\ II} = A_T = 2\pi R h_2 + \pi r_1^2 + \pi r_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_T = 2\pi \cdot 18 \cdot 12 + \pi \cdot 224 + \pi \cdot 320 \Rightarrow A_T = 976\pi \ (m^2)$$

$$V = \frac{\pi h_2}{6}\left[3(r_1^2 + r_2^2) + h_2^2\right] \Rightarrow V = \frac{\pi 12}{6}\left[3(224 + 320) + 12^2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = 3552\pi \ (m^3)$$

Do segmento esférico III.

$$A_T = A_{calota} + A_{círculo} \Rightarrow A_T = 2\pi R h_3 + \pi r_2^2 \Rightarrow$$

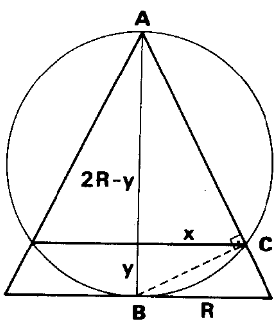
$$\Rightarrow A_T = 2 \cdot \pi \cdot 18 \cdot 16 + \pi \cdot 320 \Rightarrow A_T = 896\pi \ (m^2)$$

$$V = \frac{\pi h_3}{6}\left[3r_2^2 + h_3^2\right] \Rightarrow V = \frac{\pi 16}{6}\left[3 \cdot 320 + 16^2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{9728}{3}\pi (m^3)$$

R.86 Dada uma esfera S de diâmetro AB = 2R. Considera-se o cone C de altura AB e de raio R. Calcular o volume do sólido comum à esfera S e ao cone C.

SOLUÇÃO



O sólido comum é a reunião de um cone de raio x e altura 2R − y, com um segmento esférico de raio x e altura y.

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2(2R - y) + \\ + \frac{\pi y}{6}\left[3x^2 + y^2\right]$$

Cálculo de x e y.

Da semelhança: $\frac{x}{R} = \frac{2R - y}{2R} \Rightarrow x = \frac{2R - y}{2}$ (1)

Do triângulo ACB: $x^2 = y(2R - y)$ (2)

De (1) e (2) saem: $x = \frac{4}{5}R$ $y = \frac{2}{5}R$

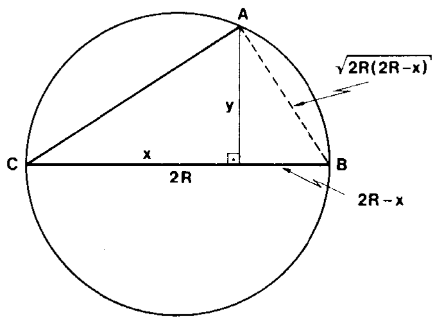
Substituindo em V temos:

$$V = \frac{1}{3}\pi\cdot\frac{16}{25}R^2\cdot 2x + \frac{\pi}{6}\cdot\frac{2}{5}R\left(3\cdot\frac{16}{25}R^2 + \frac{4}{25}R^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{12}{25}\pi R^3$$

R.87 Dada uma circunferência de raio R e diâmetro AB. Uma corda AC é tal que, girando a figura em tôrno de AB, a área da calota gerada por $\overset{\frown}{AC}$ e a área lateral do cone de geratriz $\overline{AC}$ estão na razão m:n $\left(\frac{m}{n} > 1\right)$. Calcular a projeção de $\overline{AC}$ sôbre AB.

SOLUÇÃO



$$\frac{A_{calota}}{A_{L\ cone}} = \frac{m}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2\pi Rx}{\pi yz} = \frac{m}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2Rxn = myz \qquad (1)$$

Do triângulo ACB retângulo em C vem:

$$yz = x\sqrt{2R(2R-x)} \qquad (2)$$

$$(1) \text{ e } (2) \quad \Rightarrow \quad 2Rxn = mx\sqrt{2R(2R-x)} \quad \Rightarrow \quad m^2x = 2R(m^2-n^2) \Rightarrow$$

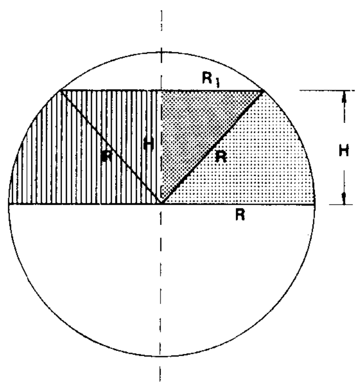
$$\Rightarrow \quad x = \frac{m^2-n^2}{m^2}\cdot 2R$$

R.88 Deduzir a fórmula do *volume do segmento esférico*, supondo conhecida a fórmula do volume do setor esférico.

SOLUÇÃO

Dividamos em 2 casos:

1º CASO: uma das bases do segmento esférico é círculo máximo da esfera.

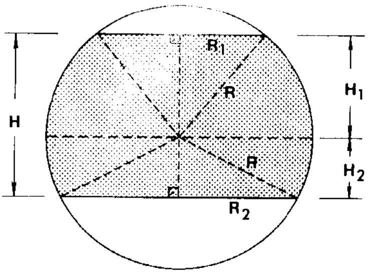


$$\left.\begin{aligned} V_{segm} &= V_{setor} + V_{cone} \\ V_{setor} &= \frac{2}{3}\pi R^2 H = \frac{\pi H}{6}\,4R^2 \\ V_{cone} &= \frac{1}{3}\pi R_1^2 H = \frac{\pi H}{6}\,2R_1^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

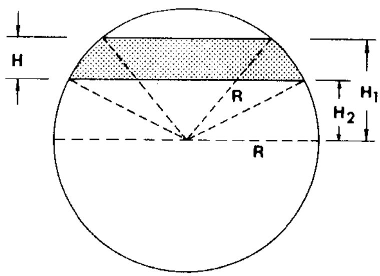
$$\Rightarrow \quad V_{segm} = \frac{\pi H}{6}\overbrace{\left[4R^2 + 2R_1^2\right] = \frac{\pi H}{6}\left[3R^2 + 3R_1^2 + \underbrace{R^2 - R_1^2}_{H_2}\right]}^{\text{artifício}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{V_{seg} = \frac{\pi H}{6}\left[3(R_1^2 + R^2) + H^2\right]}$$

2º CASO: Nenhuma das bases do segmento esférico é círculo máximo da esfera. Recaímos em soma ou diferença de dois segmentos do 1º caso.



$H = H_1 + H_2$



$H = H_1 - H_2$

$$V_{segm} = V_{segm_1} \pm V_{segm_2} =$$

$$= \frac{\pi H_1}{6}\left[3(R_1^2 + R^2) + H_1^2\right] \pm \frac{\pi H_2}{6}\left[3(R^2 + R_2^2) + H_2^2\right] =$$

$$= \frac{\pi}{6}\left[3R_1^2H_1 + 3\underbrace{R^2}_{R_2^2 + H_2^2}H_1 + H_1^3 \pm 3\underbrace{R^2}_{R_1^2 + H_1^2}H_2 \pm 3R_2^2H_2 \pm H_2^3\right] =$$

$$= \frac{\pi}{6}\left[3R_1^2H_1 + 3R_2^2H_1 + 3H_2^2H_1 + H_1^3 \pm 3R_1^2H_2 \pm 3H_1^2H_2 \pm 3R_2^2H_2 \pm H_2^3\right] =$$

$$= \frac{\pi}{6}\left[\underbrace{3R_1^2(H_1 \pm H_2) + 3R_2^2(H_1 \pm H_2)} + \underbrace{H_1^3 \pm 3H_1^2H_2 + 3H_1H_2^2 \pm H_2^3}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{6}\left[(3R_1^2 + 3R_2^2)\underbrace{(H_1 \pm H_2)}_{H} + \underbrace{(H_1 \pm H_2)^3}_{H}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{6}\left[3(R_1^2 + R_2^2)H + H^3\right] \Rightarrow \quad \boxed{V_{segm} = \frac{\pi H}{6}\left[3(R_1^2 + R_2^2) + H^2\right]}$$

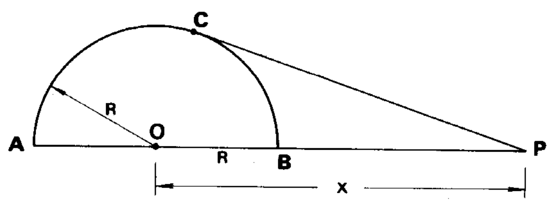
VI. PROBLEMAS PROPOSTOS.

P.257 Um ponto luminoso está situado a 2m de distância de uma esfera de raio igual a 4 m. Qual o valor da área da porção iluminada da esfera?

P.258 (EEMAUÁ - 64) Admitindo a Terra como esférica, determinar a altura e a área da calota esférica observada por um astronauta que sobrevôa a Terra no instante em que êle se encontra na altitude de 9 vêzes o raio terrestre. Adotar o raio da Terra como unidade de medida.

P.259 Determinar a que distância $\underline{x}$ da superfície de uma esfera de raio R deve ficar um ponto M a fim de que a calota visível dêsse ponto seja uma fração dada $\frac{1}{m}$ da superfície da esfera.

P.260 (EEMACK - 64) É dado um semi-círculo $\widehat{AB}$ de raio R e um ponto P no prolongamento do diâmetro. Calcular $\overline{OP}$ de modo que a tangente $\overline{PC}$ possa gerar em tôrno do diâmetro uma área igual à área gerada pelo arco $\widehat{AC}$ em tôrno do mesmo diâmetro.



P.261 (FFCLUSP - 58) Corta-se uma esfera de raio $\underline{R}$ por um plano α. A diferença das áreas das calotas obtidas é igual à área da secção determinada pelo plano. Qual a distância do plano ao centro da esfera?

P.262 Calcular a razão entre as duas calotas esféricas em que uma superfície esférica é dividida por um plano que passa por uma face do cubo inscrito.

P.263 Uma zona esférica e um fuso de uma mesma esfera têm áreas iguais. A altura da zona é $\frac{1}{n}$ do raio. Calcular o arco equatorial do fuso.

P.264 Calcular a área total e o volume de uma cunha de 30° de uma esfera de raio r.

P.265 Um anel esférico é gerado por um segmento circular cuja corda mede ℓ. Sendo V o volume do anel, calcular a projeção da corda sôbre o eixo.

P.266 (EESCUSP - 62) Determinar o volume comum a duas esferas de raios de 4 cm e 6 cm, respectivamente, cujos centros distam 8 cm.

P.267 (ITA - 64) Num segmento esférico de uma só base, de uma esfera de raio R, está inscrito um cone, cujo vértice é um dos pólos de sua base. Qual a área da base, se a razão entre o volume do cone e o do segmento esférico é igual à constante K? (Discutir o problema)

P.268 (FFCLUSP - 65) Seja uma esfera de raio R cortada por um feixe de N planos que tem uma reta comum, determinando nesta N + 1 sólidos. Sendo S a superfície total dêsses sólidos, prove que:

$$\frac{S}{2\pi R^2} - 2 \leqslant N$$

P.269 (EEMACK - 65) O volume de um setor esférico é proporcional ao quadado ou ao cubo do raio? Justificar.

P.270 (EPUSP - 61) Dois setôres esféricos pertencentes a uma mesma esfera e de mesmo volume têm necessàriamente a mesma altura?

P.271 (FAMACK - 64) Uma esfera de raio R é furada segundo um setor esférico cujo vértice coincide com o centro da esfera. Determinar a expressão que dá o raio da circunferência segundo o qual o setor corta a esfera, de tal maneira que o volume do setor seja $\frac{1}{n}$ do volume da esfera.

P.272 (EELINS - 68) Seja dada uma esfera de raio R e um ponto P distante $h > R$ do seu centro. Considere-se o cone indefinido, formado pela totalidade das retas tangentes à esfera, traçadas pelo ponto P. Calcular o volume do sólido, cujos pontos são internos ao cone e externos à esfera.

P.273 Dado um hemisfério H, definido por seu círculo máximo C e pelo pólo correspondente P, determinar o volume interior a H e exterior a quatro cones, tendo P para vértice comum e para bases quatro círculos iguais, situados no plano de C, tangentes interiormente a êste círculo e, exteriormente, entre si, dois a dois.

VII. TESTES.

T.147 (EPUSP - 67) Um cone de vértice no centro de uma esfera de raio R intercepta a superfície esférica segundo uma região de área S. A intersecção do cone com a esfera tem volume igual a:

a) $\frac{1}{2}\pi$ SR

b) $\frac{1}{3}\pi$ SR

c) $\frac{1}{2}$ SR

d) $\frac{1}{3}$ SR

e) Nenhuma das respostas anteriores.

T.148 (FFCLUSP - 67) Uma esfera de raio 1 cm repousa sôbre uma abertura em madeira em forma de triângulo equilátero, de lado 2 cm; a altura da calota acima do plano de madeira é:

a) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ cm

b) $(1 + \sqrt{\frac{2}{3}})$ cm

c) 1,5 cm

d) 1 cm

e) Nenhuma das afirmações anteriores é verdadeira

T.149 (EESCUSP - 68) É dada uma semi-esfera de raio r, e um plano paralelo ao do círculo base, que corta a semi-esfera em duas partes de igual área. Qual a distância dêste plano ao da base da semi-esfera?

a) $\frac{r}{\sqrt{2}}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}r$

c) $\frac{r}{2}$

d) $\frac{2}{3}r$

e) nenhuma das precedentes respostas é exata

T.150 (CESCEM - 71) Três esferas de raios 1, 1 e 4 são tangentes exteriormente duas a duas e tangentes ao plano α nos pontos A, B e C respectivamente. Os lados do triângulo ABC medem:

a) 5, 5 e 2

b) 4, 2 e 2

c) 4, 4 e 2

d) com os dados não é possível calculá-los

e) nenhuma das respostas anteriores

RESPOSTAS DOS PROBLEMAS.

CAPÍTULO I

P.1 $\frac{35}{6}$;

P.2 17 ;

P.3 $\frac{2}{3}$;

P.4 24 ;

P.5 $p - a$, $p - b$, $p - c$;

P.6 4,5 ;

P.7 a) $\frac{8}{3}$, b) 21 ;

P.8 a) 65 , b) $2(1 + \sqrt{2})$,
c) $3\sqrt{17}$, d) 6 ;

P.9 $8\sqrt{2}$;

P.10 $\frac{2 - \sqrt{2}}{2}$;

P.11 45° ;

P.12 22 ;

P.13 $\sqrt{b^2 - 3}$, $b \geqslant \sqrt{3}$;

P.14 5 ;

P.15 20 ;

P.16 4 ;

P.17 0,5 cm ;

P.18 $\frac{a(\sqrt{2} - 1)}{2}$;

P.19 $\frac{m\sqrt{6}}{3}$;

CAPÍTULO II

P.21 $t = 13$, $x = \frac{60}{13}$,
$y = \frac{25}{13}$, $z = \frac{144}{13}$;

P.22 $m^2 = ch$, $n^2 = bh$,
$a^2 = bc$, $m \cdot n = a \cdot h$,
$m \cdot a = n \cdot c$, $n \cdot a = m \cdot b$,
$b^2 + a^2 = n^2$, $c^2 + a^2 = m^2$
$m^2 + n^2 = h^2$, $\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{a^2}$

P.23 $13\sqrt{3}$ (note que $\hat{C} = 30°$,
pois AB = raio);

P.24 $R = \frac{25}{8}$ cm ;

P.25 20 m e 15 m ;

P.26 a) $R = \frac{xh}{x - h}$, b) $x = \frac{Rh}{R - h}$;

P.27 a) acutângulo,
b) obtusângulo,
c) retângulo,
d) acutângulo,
e) obtusângulo;

P.28 $\ell_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$,
$a_8 = \frac{R}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$;

P.29 $\ell_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$,

$a_5 = \frac{R}{4}(\sqrt{5} + 1)$;

P.30 a) $\frac{\pi d}{12}$, b) $\frac{\pi d}{8}$, c) $\frac{\pi d}{6}$,

d) $\frac{\pi d}{4}$, e) $\frac{\pi d}{3}$, f) $\frac{3\pi d}{8}$,

g) $\frac{5\pi d}{12}$;

P.31 180^o;

CAPÍTULO III

P.35 $\frac{bc}{4}$;

P.36 é o isósceles;

P.39 a área do semi-círculo que tem a hipotenusa por diâmetro é igual à soma das áreas dos outros dois.

P.42 a) $\frac{1}{12}\pi r^2$, b) $\frac{1}{8}\pi r^2$,

c) $\frac{1}{6}\pi r^2$, d) $\frac{1}{4}\pi r^2$,

e) $\frac{1}{3}\pi r^2$, f) $\frac{3}{8}\pi r^2$,

g) $\frac{5}{12}\pi r^2$;

P.43 a) $\frac{(\pi - 3)r^2}{12}$,

b) $\frac{(\pi - 2\sqrt{2})r^2}{8}$,

c) $\frac{(2\pi - 3\sqrt{3})r^2}{12}$,

d) $\frac{(\pi - 2)r^2}{4}$,

e) $\frac{(4\pi - 3\sqrt{3})r^2}{12}$,

f) $\frac{(3\pi - 2\sqrt{2})r^2}{8}$,

g) $\frac{(5\pi - 3)r^2}{12}$;

P.44 $2(3\sqrt{3} - \pi)$;

P.46 $(5\pi - 6\sqrt{3})\cdot\frac{r^2}{6}$;

P.47 3;

P.48 $\frac{\sqrt{a^2 + 480} + \sqrt{a^2 - 480}}{2}$,

$\frac{\sqrt{a^2 + 480} - \sqrt{a^2 - 480}}{2}$,

$4\sqrt{30}$;

P.49 $\frac{4}{3}A$;

P.50 16 por 13,5;

P.51 1º) $\frac{(4 - \pi)a^2}{4}$,

2º) $\frac{(\pi - 2)a^2}{2}$,

3º) $\frac{(4 - \pi)a^2}{4}$;

P.52 1º) $\frac{(\pi - 2)a^2}{4}$,

2º) $\frac{(4 - \pi)a^2}{2}$,

3º) $\frac{(\pi - 2)a^2}{2}$;

P.53 1º) $\frac{a^2}{2}$, 2º) $\frac{\pi a^2}{9}$,

3º) $\frac{(\pi + 6\sqrt{3})a^2}{72}$;

P.56 $\frac{(2\sqrt{3} - 1)a^2}{44}$;

P.57 $(3\sqrt{3} + \pi - 3\sqrt{2})\frac{R^2}{12}$;

P.58 $(\pi + 3 - 3\sqrt{3})\frac{a^2}{3}$;

CAPÍTULO IV

P.59 $d = 11$ cm,
$S = 8(3 + 7\sqrt{6})$ cm^2,
$V = 48\sqrt{6}$ cm^3;

P.60 $V = 6$ m^3;

P.61 $x = 60$ cm, $y = 80$ cm,
$z = 120$ cm, $S = 43200$ cm^2,
$V = 576\ 000$ cm^3;

P.62 $x = \dfrac{ad}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$,
$y = \dfrac{bd}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$,
$z = \dfrac{cd}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$;

P.63 4m, 6m, 8m;

P.64 $x = \dfrac{p \cdot \ell}{\sqrt{p + q + r}}$,
$y = \dfrac{q \cdot \ell}{\sqrt{p + q + r}}$,
$z = \dfrac{r \cdot \ell}{\sqrt{p + q + r}}$;

P.65 e;

P.66 $x = \dfrac{\sqrt{Sst}}{\sqrt{2r(r + s + t)}}$,
$y = \dfrac{\sqrt{Srt}}{\sqrt{2s(r + s + t)}}$,
$z = \dfrac{\sqrt{Srs}}{\sqrt{2t(r + s + t)}}$;

P.67 $x = 3$m, $y = 6$m, $z = 12$m;

P.68 $x = 2{,}5$ dm; $y = 4$ dm;
$z = 3{,}5$ dm; $S = 65{,}50$ dm^2;
$V = 35$ dm^3;

P.69 B;

P.70 2,5 cm, 5 cm, 10 cm;

P.71 6m, 10m, 15m;

P.72 E;

P.73 3m, 5m, $\sqrt{43}$ m, $V = 45$ m^3;
ou
$\dfrac{13}{3}$ m, $\dfrac{7}{3}$ m, $\dfrac{\sqrt{43}}{3}$ m,
$V = \dfrac{1183}{27}$ m^3;

P.74 12 cm, 16 cm, 6 cm;

P.75 3 cm, 12 cm, 4 cm;
ou
$(7 - \sqrt{23})$cm, 5 cm,
$(7 + \sqrt{23})$ cm;

P.76 12a, 15a, 16a;

P.77 144 m^3;

P.78 4m, 8m, $A_L = 96$ m^2,
$A_T = 8(12 + \sqrt{3})$ m^2;

P.79 $\dfrac{4a\sqrt{3}}{3}$, $\dfrac{9a^2\sqrt{3}}{2}$;

P.80 $V = 540\sqrt{3}$ cm^3,
$A_L = 360$ cm^2;

P.81 8 cm;

P.82 $36\sqrt{3}\,a^3$;

P.83 $30\sqrt{231}$ cm^3;

P.84 $A_L = 6Rh$, $V = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}R^2h$;

P.85 $\ell = \dfrac{4\sqrt{3}\ V}{3S}$, $h = \dfrac{S^2 \cdot \sqrt{3}}{24V}$;

P.86 $x = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2 - 40S}}{4}$,

$y = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2 - 40S}}{10}$,

$a \geqslant 2\sqrt{10 \cdot S}$

P.87 $\dfrac{-3k^2 + \sqrt{3k(44 - k^3)}}{6k}$; $V > k^3$

P.88 $\dfrac{\sqrt{d^2 + S}}{3} - \sqrt{\dfrac{2d^2 - S}{6}}$,

$\dfrac{\sqrt{d^2 + S}}{3}$,

$\dfrac{\sqrt{d^2 + S}}{3} + \sqrt{\dfrac{2d^2 - S}{6}}$

onde $\dfrac{S}{2} \leqslant d^2 < \dfrac{5S}{4}$

CAPÍTULO V

P.92 $B = 9\sqrt{3}\,cm^2$,

$A_L = 9\sqrt{39}\,cm^2$,

$A_T = 9\sqrt{3}\,(\sqrt{13} + 1)\ cm^2$,

$V = 18\sqrt{3}\,cm^3$;

P.93 $h = 4m$, $A_L = 60m^2$, $V = 48m^3$;

P.94 $h = \dfrac{a}{2}$, $x = \dfrac{a\sqrt{21}}{6}$,

$V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$;

P.95 Os triângulos são retângulos em D, D, A e C.

$A_T = 2(42 + \sqrt{5})m^2$;

P.96 $A_T = (2\sqrt{3} + \sqrt{2})a^2$,

$V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$;

P.97 $A_T = \dfrac{1}{2}\,b(2a + b + \sqrt{2a^2 + b^2})$,

$V = \dfrac{1}{6}\,b^2a$;

P.98 $h = 3\sqrt{6}\,m$;

P.99 $\dfrac{2}{3}\,a^2 \cdot m$;

P.100 $V = \dfrac{a^3}{16}$;

P.101 $c = \dfrac{3V}{B} - (a + b)$;

P.102 1;

P.103 Não. Elas são equivalentes.

P.104 $\dfrac{250}{3} \cdot \sqrt{3(88\sqrt{3} - 153)}$;

P.105 $x = \dfrac{2}{3}\,h$, $V = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}\,h^3$;

CAPÍTULO VI

P.112 $\dfrac{3}{2}$;

P.113 $A_L = \pi h^2$, $A_T = \dfrac{3}{2}\,\pi h^2$,

$V = \dfrac{1}{4}\,\pi h^3$;

P.114 $A_L = 25\pi^2 cm^2$,

$A_T = 25\pi(\pi + 2)cm^2$,

$V = \dfrac{125}{2}\,\pi^2\ cm^3$;

P.115 $V = \dfrac{375\sqrt{3}\,\pi}{2}\ cm^3$;

P.116 Fica multiplicada por k^2;

P.117 $\dfrac{1}{3}$;

P.118 $A_L = \dfrac{2V}{R}$;

P.119 $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{R_1}{R_2}$;

P.120 k;

P.121 $h = \dfrac{A}{\sqrt{S - A}}$

P.122 $V_1 = \dfrac{1296\pi}{125}\ m^3$,

$V_2 = \dfrac{2304\pi}{125}\ m^3$;

P.123 $\dfrac{\sqrt{h^2 + 2a^2} - h}{2}$;

P.124 $V = \frac{1}{3}\pi r^3$;

P.125 $A_T = 36\pi\ cm^2$, $V = 24\pi\ cm^3$;

P.126 $A_L = \frac{1}{2}\pi g^2$, $A_T = \frac{3}{4}\pi g^2$,

$V = \frac{\sqrt{3}}{24}\pi g^3$;

P.127 30º;

P.128 2m;

P.129 $\alpha = 180º$;

P.130 $\alpha = 240º$;

P.131 $r = 3$ cm, $h = 4$ cm,

$g = 5$ cm;

P.132 $r = \frac{a}{2}$, $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;

P.133 $h = \pi R$,

$A_L = \pi R^2\sqrt{1 + \pi^2}$,

$V = \frac{1}{3}\pi^2 R^3$;

P.134 $r = \frac{\sqrt{g^2 + 4a^2} - g}{2}$;

P.135 $\frac{A^2\sqrt{(\pi g^2 + A)(\pi g^2 - A)}}{3\pi^2 g^3}$

para $A \leqslant \pi g^2$;

P.136 $V = \frac{S^2 h}{3(\pi h^2 + 2S)}$;

P.137 $V = \frac{4\sqrt{3}}{3}\pi R^3$;

CAPÍTULO VII

P.141 $A_T = 2a^2\sqrt{3}$, $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$;

P.142 $A_i = \frac{\pi}{6}a^2$, $A_c = \frac{3\pi}{2}a^2$,

$V_i = \frac{\sqrt{6}}{216}\pi a^3$, $V_c = \frac{\sqrt{6}}{8}\pi a^3$;

P.143 $3\sqrt{3}$;

P.144 $\frac{h\sqrt{6}}{2}$, $\frac{2R\sqrt{6}}{3}$;

P.145 $V = 64\sqrt{3}\ cm^3$;

P.147 $A = 64\sqrt{3}$;

P.148 P é octaedro regular,

$A_T = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{2}$, $V = \frac{\ell^3\sqrt{2}}{24}$;

P.149 $\frac{V}{3}$;

P.150 $\frac{\pi\ell^2}{3}$;

P.151 $\frac{1}{6}abc$;

P.152 $\frac{5}{6}abc$;

P.153 $A_L = \ell^2\sqrt{5}$, $V = \ell^3\sqrt{3}$;

P.154 a) $\frac{a}{2}$, b) $\frac{a\sqrt{2}}{6}$, c) $\frac{a}{6}$;

P.156 os volumes são iguais.

P.157 $a = \frac{2}{3}(2\sqrt{3} + 3)r$;

P.158 $A = 3\sqrt{3}$;

P.160 3R;

P.161 Posição do centro: intersecção do plano mediador de AD com a reta perpendicular ao plano ABC pelo circuncentro do triângulo,

$R = \frac{2\sqrt{3}}{3}\ell$;

P.162 $R = 7{,}5$ m, $G = 19{,}5$ m;

P.163 $H = 16$ cm, $G = 20$ cm;

P.164 12;

P.165 10 cm;

P.166 $72\pi\ cm^3$;

P.167 $12\ cm^3$;

P.168 $\frac{256\pi}{3}\ cm^3$;

P.169 $\frac{4}{9}$ e $\frac{2}{3}$;

P.170 $\frac{4}{9}$ e $\frac{2}{3}$;

P.172 1º) $r = \frac{a}{2}$, $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $S = \frac{3\pi a^2}{4}$

$V = \frac{\sqrt{3}}{24}\pi a^3$;

2º) $S' = \frac{\pi}{3}a^2$, $V' = \frac{\sqrt{3}}{54}\pi a^3$;

3º) $\frac{S'}{S} = \frac{4}{3}$, $\frac{V'}{V} = \frac{4}{9}$;

P.173 a) $B = \frac{1}{2}\pi R^2$, $A_L = 2\pi R^2$,

$A_T = 3\pi R^2$, $V = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi R^3$;

b) $B = \frac{3}{4}\pi R^2$, $A_L = \frac{3}{2}\pi R^2$,

$A_T = \frac{9}{4}\pi R^2$, $V = \frac{3}{8}\pi R^3$;

c) $V^2_{cil} = V_{cone} \cdot V_{esf}$;

P.176 $A_T = 4R(R + h\sqrt{2})$;

P.177 $A_L = \sqrt{6}\,\pi R^2$;

P.178 $\frac{8\pi - \sqrt{6}}{4\pi} r$;

P.179 $r = R\sqrt{\frac{R}{G + R}}$,

$h = \sqrt{G - R}\,(\sqrt{G + R} - \sqrt{R})$;

P.180 raio da base $= \frac{2Rh}{2h + \sqrt{h^2 + R^2}}$,

altura $= \frac{h\sqrt{h^2 + R^2}}{2h + \sqrt{h^2 + R^2}}$;

P.181 $x = \frac{2mRh}{nR + n\ell + 2mh - 2mR}$

P.182 1º) $H = \sqrt{G^2 - R^2}$,

$r = \frac{R\sqrt{G^2 - R^2}}{R + G}$;

2º) $R = \sqrt{G^2 - H^2}$,

$r = \frac{H\sqrt{G^2 - R^2}}{G + \sqrt{G^2 - H^2}}$;

3º) $G = \sqrt{H^2 + R^2}$,

$r = \frac{RH}{R + \sqrt{H^2 + R^2}}$;

4º) $G = \frac{H(H - r)}{\sqrt{H(H - 2r)}}$,

$R = \frac{rH}{\sqrt{H(H - 2r)}}$;

P.183 $V = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{g^6}{h^3}$;

P.184 $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$;

P.186 $h = \frac{mH \pm \sqrt{mH\,(mH - 2g)}}{2m}$,

$\frac{g}{H} \leqslant \frac{m}{2}$;

P.187 28;

P.188 diâmetro da base

$x = \frac{\sqrt{d^2 + 2a^2} + \sqrt{d^2 - 2a^2}}{2}$

altura

$y = \frac{\sqrt{d^2 + 2a^2} - \sqrt{d^2 - 2a^2}}{2}$

condição: $d \geqslant a\sqrt{2}$;

CAPÍTULO VIII

P.189 $100\ m^2$;

P.190 $x = h\sqrt{\frac{b}{B}}$;

P.192 $\frac{h\sqrt{2}}{2}$;

P.193 $\frac{h}{2}$

P.194 $\frac{h\sqrt[3]{4}}{2}$;

P.195 $\frac{h\sqrt[3]{3}}{3}$;

P.196 $\frac{Bt^2}{\pi g^2 - B}$, sendo $\pi g^2 > B$;

P.197 $\ell\sqrt[3]{\frac{V'}{V}}$;

P.198 $\frac{15}{512}$ dm^3, $\frac{7665}{512}$ dm^3;

P.199 $63\sqrt{3}$ dm^3;

P.200 $4\sqrt[3]{9}$ m, $4\sqrt[3]{18}$ m;

P.201 240 m;

P.202 550 m^2;

P.203 $x = \frac{h\sqrt[3]{4}}{2}$, $x_i = h\sqrt[3]{\frac{i}{n}}$;

P.204 $\frac{3\sqrt{2}}{4}r$;

P.205 9 m^2;

P.206 $x = \frac{\sqrt{Rg(g^2 - R^2)}}{R}$;

P.207 O plano deve passar a 2m da base maior.

P.208 $\sqrt[3]{\frac{aR^3 + br^3}{a + b}}$;

P.209 $\sqrt[3]{\left(\frac{pB\sqrt{B} + qb\sqrt{b}}{p + q}\right)^2}$;

P.210 $6\sqrt[3]{100}$ cm;

P.211 $\frac{485\sqrt{3}}{18}$ dm^3;

P.212 $\frac{R\sqrt{H^2 + (R - r)^2}}{R - r}$;

P.213 $\frac{h\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{B'}}$;

P.214 $B\left(\frac{3V_2 - V_1}{3V_1}\right)^2$;

P.215 $g = R$;

P.216 $\frac{R}{r} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$;

P.217 $\frac{24}{5}$ cm;

P.218 $h = \frac{2Rr}{R + r}$;

P.219 1m;

P.220 $\frac{1}{3}\pi\frac{R^2rh}{R - r}$;

P.221 $\frac{32\pi}{3}$ m^3;

P.222 $\frac{h}{2} = \sqrt{R\cdot r}$;

P.223 $\frac{16\pi R^3}{6}$;

P.224 $V = \frac{1}{3}\cdot\frac{h}{H^2}(3H^2 - 3Hh + h^2)B$ onde B é a área da base maior.

P.225 $\frac{h}{b}(\sqrt{B} - \sqrt{b})^2$;

P.226 $78\sqrt{3}$ m^3;

P.227 14 m;

P.228 $h = \frac{ab}{a + b}$;

P.230 $\frac{8\pi}{3}(3 + \sqrt{2})$;

P.231 $\frac{h \pm \sqrt{h^2 - 4ah}}{2}$, com $h \geqslant 4a$;

P.232 $3\sqrt{17}\,\pi r^2$, $\frac{4 + \sqrt{19}}{3}r$;

P.233 a) $\frac{H}{3}\sqrt[4]{3\pi^2}$, b) $\frac{g}{\pi^2}\sqrt[4]{3\pi^2}$;

CAPÍTULO IX

P.236 não;

P.240 $V = \frac{\pi}{2}a^3$;

P.241 $V = \frac{\pi}{4} a^3$, $A = \pi a^2 \sqrt{3}$;

P.242 $\frac{\pi}{2} a^3$;

P.243 $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{4}$

P.244 $V = \pi a^3 \sqrt{2}$, $A = 4\pi a^2 \sqrt{2}$;

P.245 $V = 9\pi \sqrt{2}\ m^3$;

P.247 $\pi a^3 \operatorname{sen}^2 \theta$;

P.248 $80\pi\ cm^3$;

P.249 $V = 60\pi\ cm^3$;

P.250 $A = 4\pi d(a + b)$, $V = 2\pi abd$;

P.252 $R = \frac{B}{\pi A}$;

P.253 $x = \sqrt[3]{\frac{V^2}{\pi V'}}$, $y = \sqrt[3]{\frac{(V')^2}{\pi\ V}}$;

P.254 $R = \sqrt{\frac{B^2 - 4\pi^2 A^2}{2\pi B}}$,

$g = \frac{\sqrt{4A^2 + R^4}}{R}$;

P.255 $200\sqrt{3}\ m^2$;

P.256 $x = \frac{a}{3}$ ou $x = \frac{2a}{3}$;

CAPÍTULO X

P.257 $\frac{32\pi}{3}\ m^2$;

P.258 $h = \frac{9}{10} R$, $A = \frac{9}{5} \pi R^2$;

P.259 $x = \frac{2R}{m - 2}$; $m > 2$

P.260 $x = 3R$;

P.261 $(\sqrt{5} - 2)R$;

P.262 $2 + \sqrt{3}$;

P.263 $\frac{\pi}{n}$ rad;

P.264 $A_T = \frac{4}{3} \pi r^2$, $V = \frac{1}{9} \pi r^3$;

P.265 $\frac{6V}{\pi \ell^2}$;

P.266 $\frac{53\pi}{6}\ cm^3$;

P.267 $\frac{k(2 - 3k)}{(1 - k)^2} \pi R^2$; $k < \frac{2}{3}$

P.271 $\frac{\sqrt{n - 1}}{n} 2R$; $n > 1$

P.272 $\frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^2}{n} \cdot (h - R)^2$;

P.273 $\frac{2}{3} (4\sqrt{2} - 5)\pi R^3$;

RESPOSTAS DOS TESTES.

	a	b	c	d	e
T. 1			■		
T. 2			■		
T. 3	■				
T. 4			■		
T. 5		■			
T. 6	■				
T. 7				■	
T. 8	■				
T. 9			■		
T.10		■			
T.11		■			
T.12			■		
T.13		■			
T.14				■	
T.15					■
T.16	■				
T.17					■
T.18	■				
T.19		■			
T.20			■		
T.21		■			
T.22	■				
T.23				■	
T.24			■		
T.25	■				
T.26		■			
T.27					■
T.28		■			
T.29			■		
T.30			■		

	a	b	c	d	e
T.31		■			
T.32				■	
T.33	■				
T.34		■			
T.35			■		
T.36			■		
T.37			■		
T.38					■
T.39	■				
T.40					■
T.41				■	
T.42				■	
T.43					■
T.44				■	
T.45	■				
T.46			■		
T.47			■		
T.48				■	
T.49				■	
T.50				■	
T.51	■				
T.52	■				
T.53			■		
T.54				■	
T.55		■			
T.56		■			
T.57				■	
T.58		■			
T.59				■	
T.60		■			

	a	b	c	d	e
T.61					■
T.62				■	
T.63		■			
T.64		■			
T.65				■	
T.66				■	
T.67			■		
T.68		■			
T.69				■	
T.70		■			
T.71	■				
T.72				■	
T.73				■	
T.74				■	
T.75		■			
T.76		■			
T.77				■	
T.78		■			
T.79	■				
T.80			■		
T.81				■	
T.82				■	
T.83			■		
T.84					■
T.85	■				
T.86					■
T.87				■	
T.88				■	
T.89	■				
T.90			■		

	a	b	c	d	e
T.91			■		
T.92	■				
T.93			■		
T.94		■			
T.95			■		
T.96				■	
T.97			■		
T.98					■
T.99	■				
T.100	■				
T.101					■
T.102	■				
T.103	■				
T.104				■	
T.105				■	
T.106					■
T.107					■
T.108	■				
T.109			■		
T.110		■			
T.111	■				
T.112				■	
T.113	■				
T.114	■				
T.115	■				
T.116					■
T.117					■
T.118			■		
T.119			■		
T.120		■			

	a	b	c	d	e
T.121					■
T.122					■
T.123				■	
T.124				■	
T.125			■		
T.126		■			
T.127	■				
T.128		■			
T.129					■
T.130		■			
T.131	■				
T.132				■	
T.133				■	
T.134				■	
T.135	■				
T.136			■		
T.137	■				
T.138		■			
T.139				■	
T.140				■	
T.141			■		
T.142	■				
T.143			■		
T.144				■	
T.145			■		
T.146		■			
T.147				■	
T.148					■
T.149			■		
T.150			■		

BIBLIOGRAFIA

1. CARONNET, Th. *Exercices de géométrie.* Paris. Librairie Vuibert, 1956.

2. CASTRUCCI, B. *Lições de geometria elementar.* São Paulo, 1962.

3. CIPOLLA, M. & MIGNOSI, G. *Geometria elementare.* Torino, Società Editrice Internazionale, 1945.

4. ENRIQUES, F. & AMALDI, U. *Elementi di Geometria.* Bologna, Nicola Zanichelli Editore, 1961.

5. MOISE, Edwin E. & DOWNS, Floyd L. Jr. *Geometria Moderna.* São Paulo, Editôra Edgar Blücher Ltda, 1971.

6. MORGAN, Frank M. & ZARTMAN, J. *Geometry.* Boston, Houghton Mifflin Co., 1963.

7. NICOSIA, R. & CORDOVA, A. *La bella geometria.* Torino, Società Editrice Internazionale, 1965.

COLEÇÃO
MATEMÁTICA MODERNA

---

1. TEORIA DOS CONJUNTOS

2. ÁLGEBRA I:

SEQUÊNCIAS • PROGRESSÕES
LOGARÍTMOS

3. GEOMETRIA DE POSIÇÃO

4. GEOMETRIA MÉTRICA

5. TRIGONOMETRIA

6. ÁLGEBRA II:

ANÁLISE COMBINATÓRIA • PROBABILIDADE
MATRIZES • DETERMINANTES
SISTEMAS LINEARES

7. ÁLGEBRA III:

NÚMEROS COMPLEXOS
POLINÔMIOS
EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

8. ÁLGEBRA IV:

FUNÇÕES
LIMITES
DERIVADAS

9. GEOMETRIA ANALÍTICA

Dos mesmos autores

composição e artes:
am produções gráficas ltda.

fotolitos e impressão:
gráfica editôra hamburg ltda.
— fone: 278-2648
são paulo — estado de são paulo — brasil

editôra moderna ltda.
travessa tamoyo, 10
tel. 70-5663
são paulo - brasil